INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK
KØBENHAVNS UNIVERSITET

En Covarians-tilgang til Variabelsammenhænge i Gymnasiet

- I et semiotisk perspektiv

Niels Nørskov Laursen

Specialerapport

Oktober 2007

IND's studenterserie nr. 6

INSTITUT FOR NATURFAGENES DIDAKTIK, www.ind.ku.dk
Alle publikationer fra IND er tilgængelige via hjemmesiden.

IND's studenterserie

Nr. 1: Ellen Berg Jensen: 15-åriges viden om klimaforskelle (2007)
Nr. 2: Martin Sonnenborg: The Didactic Potential of CAS (2007)
Nr. 3: Karina Søgaard og Sarah Kyhn Buskbjerg: Galoisteori i Gymnasiet (2007)
Nr. 4: Ana Hesselbart: Mathematical reasoning and semiosis (2007)
Nr. 5: Julian Tosev: Forskningslignende situationer (2007)
Nr. 6: Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge I gymnasiet

Niels Nørskov Laursen: En Covarians-tilgang til Variabelssammenhænge I gymnasiet - i et semiotisk perspektiv

Når man sammenligner matematikpensum i 1.G. før gymnasiereformen med pensum på C-niveau efter reformen, er en af de største ændringer, at emnet funktioner ikke findes i pensum længere, i stedet skal man lære om *variabelsammenhænge*.

Formålet med dette speciale er ikke at diskutere hvordan funktionsbegrebet bør indføres i gymnasiet, men at udnytte den valgfrihed, der er opstået efter det abstrakte funktionsbegrebs "tilbagetrækning", til at vælge en alternativ tilgang til Funktionsbegrebet. Ud fra Duvals teori om semiotiske repræsentationer og en analyse af elevernes opfattelse funktionsbegrebet, designes af en covarians-tilgang til funktionsbegrebet baseret på.additive og multiplikative ændringer.

INDs studenterserie består af kandidatspecialer skrevet ved eller i tilknytning til Institut for Naturfagenes Didaktik. Disse drejer sig ofte om uddannelsesfaglige problemstillinger, der kan interessere en vid kreds af undervisere, administratorer mv. både indenfor og udenfor universitetets mure. Derfor har vi fra og med 2007 besluttet at publicere dem elektronisk i INDs studenterserie, naturligvis under forudsætning af samtykke fra forfatterne. Det skal understreges at der tale om studenterarbejder, og ikke endelige forskningspublikationer.

1 Indledning

1.1 Om variabelsammenhænge på C-niveau

Når man sammenligner matematikpensum i 1.G. før gymnasiereformen med pensum på C-niveau efter reformen, er en af de største ændringer, at emnet funktioner ikke findes i pensum længere, i stedet skal man lære om *variabelsammenhænge*. I den traditionelle matematik-undervisning starter man med at give en præcis definition af en funktion, og bruger derefter lang tid på at komme med eksempler på funktioner og ikke-funktioner, hvorefter sammensætning af funktioner og omvendte funktioner tages op. Med den nye reform skærer man ind til benet og bruger kun tid på relevante variabelsammenhænge, som minder om de naturlove, der behandles i anvendelserne i gymnasiet. Meningen er, at man på C-niveau skal give en ukompliceret og uformel definition af variabel-sammenhænge: En variabelsammenhæng er bare en ligning, hvor der indgår nogle variable, og vi kan selv vælge, hvad der skal være den afhængige og den uafhængige variabel.

Formålet med dette speciale er ikke at diskutere hvordan funktionsbegrebet bør indføres i gymnasiet, men at udnytte den valgfrihed, der er opstået efter det abstrakte funktionsbegrebs ”tilbagetrækning”, til at vælge en alternativ tilgang til funktionsbegrebet og designe et undervisningsforløb om variabelsammenhænge, der er skræddersyet til en givet forsøgsklasses niveau. Det stod fra starten klart, at jeg som forsøgsklasse ville bruge den klasse, som jeg i hele skoleåret 2006/2007 skulle undervise i matematik som årsvikar, nemlig 1.j. på Virum Gymnasium.

I kapitel 2 beskrives de teoretiske rammer for designet, hvilket primært er Duvals teori om semiotiske repræsentationer. Kapitel 3 indeholder a priori analysen, hvor der fokuseres på funktionsbegrebet, elevernes opfattelse af funktionsbegrebet og mulighederne og begrænsningerne ved de enkelte register i forbindelse med funktionsbegrebet. Derefter behandles de konkrete familier af funktioner, som skulle behandles i designet, og en analyse af funktionernes karakteristiske egenskaber fører i slutningen af Kapitel 3 til valget af en covarians-tilgagng til funktionsbegrebet baseret på additive og multiplikative ændringer. I Kapitel 4 designes på baggrund af Duvals teori om semiotiske repræsentationer en diagnostisk test, som har til hensigt at undersøge forsøgselevernes forudsætninger i brug af tabeller, grafer og ligninger, og i Kapitel 5 tages der fat på det egentlige design af undervisningsforløbet. De opgaver og det undervisningsmateriale, som er resultatet af designet findes i Appendiks, og da der er tale om mange sider, som læseren skal slå op i undervejs, har jeg valgt, at Appendiks skal være i en særskilt mappe. Resultaterne af elevernes skriftlige arbejde analyseres i Kapitel 6, og kopier af elevernes arbejde findes som bilag.

Jeg vil gerne sige tak til Professor Carl Winsløw for meget intense og lærerige møder, til Martin Sonnenborg for konstruktiv kritik undervejs og til min kæreste Anette for at have passet godt på vores lille datter Asta i de perioder, hvor specialeskrivningen var meget tidskrævende. Og til sidst vil jeg sige tak til Virum Gymnasium og eleverne i 1.j. – uden forsøgskaniner var dette speciale ikke blevet til noget!

1.2 Rammerne for forløbet

Forløbet skulle finde sted på Virum Gymnasium i 1.j. i marts 2007, det skulle omhandle to typer af sammenhænge, som ikke var gennemgået før i klassen, nemlig eksponentielle sammenhænge og potens-sammenhænge, og der skulle desuden repeteres lineære sammenhænge, som alle 1.G. klasser på Virum Gymnasium skulle arbejde med i efteråret 2006. Varigheden af forløbet var ikke helt fastlagt fra starten, men var på forhånd bedømt til at være omkring 1 måned, svarende til cirka 10 moduler af 100 minutters varighed.

1.3 Præsentation af 1.j. på Virum Gymnasium 2006/2007.

En vigtig faktor, der skulle tages hensyn til, da jeg skulle tage de første beslutninger i mit design, var selvfølgelig de elever, der skulle undervises. En komplicerende faktor var, at det efter grundforløbet (det første halve år) var muligt for eleverne at skifte klasse, så jeg kunne ikke være sikker på at den klasse, der skulle afprøve mit design, bestod af præcis de samme elever, som den klasse jeg kendte, da jeg tog de første store beslutninger med hensyn til designet. Klassen bestod i efteråret 2006 af 30 elever, som alle havde valgt en studieretning med spansk og samfundsfag og så få naturvidenskabelige fag som muligt. Jeg skulle undervise 1.j. i matematik på C-niveau og langt de fleste elever regnede med, at de *ikke* ville vælge matematik på B- eller A-niveau, så groft sagt var matematik bare et fag, der skulle overstås for en stor del af eleverne.

Da jeg påbegyndte dette speciale, havde jeg allerede undervist klassen i et par uger, så jeg havde en god idé om deres faglige niveau: Omkring en tredjedel af klassen havde store problemer med grundlæggende færdigheder som brøkregning og brug af parenteser og havde tydeligvis haft visse problemer med matematik i folkeskolen. Lidt over en tredjedel af eleverne lå omkring eller lidt under middel med nogenlunde regnekundskaber, men uden det store abstraktionsniveau, og lidt under en tredjedel af eleverne var markant dygtigere end de andre og småkedede sig lidt under den første tids repetition af folkeskolestof.

Klassen inhomogenitet, det store antal svage elever, klassens generelt dårlige disciplin og elevernes manglende ambitioner indenfor matematik gav i starten af skoleåret et dårligt arbejdsmiljø. Udover hyppige problemer med larm i timerne gjorde klassens inhomogenitet, at det var svært at finde en passende tempo i klasseundervisningen og de svage elevers udbytte af opgaveregningen var begrænset, fordi de hele tiden gik i stå, og der ikke var tid nok til at hjælpe den enkelte elev. Generelt blev klassen betragtet som en problemklasse af gymnasiets lærere.

2 De teoretiske rammer

I dette kapitel vil jeg præsentere de overordnede teoretiske rammer for specialet uden at fokusere på funktionsbegrebet (bortset fra i et par af de eksempler, som skal illustrere teorien). Duvals teori om semiotiske repræsentationer udgør fundamentet for min semiotiske tilgang, og Sfards teori om proces/objekt-dualiteten præsenteres også her, selv om denne teori kommer i anden række og kun benyttes enkelte steder i specialet.

2.1 Duvals teori om semiotiske repræsentationer.

Dette teoriafsnit bygger primært på den nyeste tilgængelige artikel af Duval (2006). Duvals udgangspunkt er, at forskning i læring af matematik må være baseret på det, som eleverne rent faktisk producerer. Disse produkter er kun toppen af isbjerget, det er det eneste vi kan observere, men er resultatet af en række dybereliggende kognitive strukturer, som ligger gemt under overfladen. Målet med Duvals såkaldte *kognitive tilgang* er at undersøge disse kognitive strukturer og dermed finde frem til kilderne til elevernes læringsvanskeligheder (Duval 2006, 104).

Det vigtigste begreb for Duval er begrebet en *repræsentation*, der defineres som *"noget, der står for noget andet"* (min oversættelse fra Duval 2006, 103). Dette er en meget bred definition, en repræsentation kan eksempelvis være tegn fra et officielt skriftsprog, verbale ytringer, et fotografi, eller det kan være en skitse. Alt hvad eleverne producerer i matematik er derfor repræsentationer, så man kan formulere den første linje i dette afsnit sådan, at forskning i læring af matematik må være baseret på elevernes repræsentationer. Af særlig interesse for matematikere er de *semiotiske repræsentationer*, som er repræsentationer, der hører til et system af repræsentationer, hvortil der er knyttet særlige regler. Et sådant system kaldes et *system af semiotiske repræsentationer* eller bare et *semiotisk system* (Duval 2006, 104). Ethvert semiotisk system har sine egne muligheder (og begrænsninger), så for at forstå de tankeprocesser, der ligger bag matematisk aktivitet, må man tage hensyn til de semiotiske systemer, der benyttes (Duval 2006, 109).

Duval stiller spørgsmålet: Bruger man de samme kognitive strukturer i matematik som i andre fag? Svaret er nej! For det første har man i matematik - i modsætning til i andre fag - kun kontakt med de objekter, som man arbejder med, via semiotiske repræsentationer, og for det andet bruger man et større antal semiotiske systemer i matematik end i andre fag. For at lære et matematiske objekt at kende, kræver det, at man lærer at arbejde med alle objektets mulige repræsentationer. Men hvordan lærer man at adskille objektet fra repræsentationerne, når man kun kan komme i kontakt med objektet gennem repræsentationerne? Hvordan kan man overhovedet "se" et matematisk objekt, når man som begynder endnu ikke har stiftet bekendtskab med alle objektets repræsentationer endnu? Hvordan skal denne begynder i det hele taget kunne afgøre, hvad der er matematisk relevant i en semiotisk repræsentation, og hvad der ikke er matematisk relevant? Problemet er, at man for at kunne forstå hvad der er matematisk relevant for en enkelt semiotisk repræsentation, bliver nødt til at kende til det matematiske objekt, og at man på den anden side kun kan komme til at kende det matematiske objekt via semiotiske repræsentationer. At man kun kan se et matematisk objekt i form af en semiotiske repræsentation, men at man ikke må identificere det matematiske objekt med den semiotiske repræsentation kaldes for *det kognitive paradoks* (Duval 2006, 107).

For at undersøge de kognitive strukturer, der fører til elevernes produktion af repræsentationer, er det ifølge Duval vigtigt at se på hvilke kognitive funktioner, der skal bruges til at arbejde med hvert af de semiotiske systemer. Med terminologien *proces* i et semiotisk system menes i det følgende en *transformation af repræsentationer*. Den sædvanlige klassifikation af semiotiske systemer i katagorierne sprog (symbolsk eller naturligt) og billede er utilstrækkelig fra et kognitivt synspunkt, i stedet definerer Duval de såkaldte registre: Et semiotisk system er et register, hvis og kun hvis det er muligt at transformere repræsentationerne i det semiotiske system. Duval giver ikke eksplicit eksempler på semiotiske systemer, der ikke er registre, men antyder at ”pinde-notation” for naturlige tal ikke er et register.

Ifølge Hoffmann(2006, 281ff) er Duvals skelnen mellem registre og ikke-registre ganske uklar, men Hoffman skriver også, at der i semiotik ikke findes en samlet anerkendt teori, hvilket betyder, at der er en overflod af forskellig terminologi. I dette speciale vil jeg for at få et fast holdepunkt, bruge Duvals terminologi – og acceptere de uklarheder, der eventuelt følger med.

Registrene inddeles i fire katagorier på baggrund af følgende to kriterier:

1. Er processerne i det semiotiske system diskursive eller ej?
2. Er processerne i det semiotiske system algoritmiske eller ej?

Med en diskursiv proces menes en af de tre diskursive operationer (Duval 2006, 110):

- Navngivning af objekter.
- Udsagn om relationer mellem objekter eller egenskaber ved objekter.
- Inferens, det vil sige udregninger eller deduktion ved hjælp af logik.

Hvis alle processer i et register er diskursive, siger man, der er tale om et diskursivt register. I modsat fald er registret ikke-diskursivt.

Hvis processerne i et semiotisk system er algoritmiske, kaldes registret for monofunktionelt og hvis processerne ikke er algoritmiske, kaldes registret for multi-funktionelt. Følgende skema (Figur 2-1) giver en oversigt over de fire katagorier af registre (Duval 2006, 110):

Katagorisering af semiotiske systemer	**Diskursivt register**	**Ikke-diskursivt register**
Multifunktionelt register	skriftligt eller mundtligt naturligt sprog	for eksempel en figur eller skitse af en graf
Monofunktionelt register	udregning eller bevis i symbolsprog	for eksempel en graf eller tabel

Figur 2-1

Lad os se på et par eksempler. En funktion kan repræsenteres ved en ligning. En ligning er en semiotisk repræsentation, som hører til i det semiotiske system, der kan kaldes symbolsprog. Man kan lave udregninger ved hjælp af symbolsprog, så derfor er symbolsprog et register, man bruger udtrykket det *symbolske register*. Eksempler på matematiske processer, der foretages i det symbolske register, er reduktion af et formeludtryk, løsning af en ligning og differentation af en funktion. Generelt er de fleste processer, der laves med symbolsprog, algoritmiske, idet man kan opskrive en procedure for, hvordan man skal gøre. Der er altså tale om monofunktionelt register. Desuden er alle de matematiske processer, man kan lave med symbolsprog, diskursive, da de består af mindst en af de tre diskursive operationer: Navngivning, udsagn og/eller inferens. Det symbolske register er derfor et diskursivt register.

En funktion kan også repræsenteres af en graf. Eksempler på matematiske processer, man kan lave med en graf, er aflæsning af punkter, parallelforskydning og tegning af graf. Da man kan foretage transformationer af grafer, kan man med Duvals terminologi tale om det *grafiske register*. De processer, som man kan lave med en graf, foregår efter bestemte procedurer, det vil sige, at det grafiske register er mono-funktionelt. De tre diskursive operationer kan ikke foretages i det grafiske register, det vil sige, at det grafiske register er ikke-diskursivt. Generelt hører figurer, diagrammer og tabeller til i ikke-diskursive registre.

Et eksempel på en repræsentation, der hører til i et ikke-diskursivt og multifunktionelt register, er en frihånds-skitse af en graf. Skitsen kan ikke reproduceres ved hjælp af en algoritme, så derfor hører den til i et multifunktionelt register. I modsætning til en ”korrekt” tegning af en graf, hvor hvert punkt (i princippet) kan konstrueres ifølge visse lovmæssigheder, kan man ikke aflæse lokale egenskaber, som for eksempel koordinaterne til et punkt på en skitse, men kun globale egenskaber, som for eksempel om grafen går opad eller nedad. Dette betyder, at der fra et kognitivt synspunkt er stor forskel på at arbejde med grafer og med skitser af grafer.

2.1.1 Visualisering

Jeg vil her foretage et lille sidespring, som handler om hvordan repræsentationernes tilsigtede matematiske indhold ikke nødvendigvis kommer frem til modtageren. Der er næppe nogen, der vil argumentere imod, at synssansen er den vigtigste af vores sanser i matematik. Det er jo ved hjælp af synet, at vi får adgang til de semiotiske repræsentationer, som den moderne matematik er baseret på. For at forstå synets rolle i matematik, betragter Duval (2002b, 320f) de kognitive funktioner, som vores synssans generelt giver anledning til.

For det første giver synsindtrykkene os direkte adgang til fysiske objekter, denne kognitive funktion bliver kaldt *vision* af Duval. For det andet kan man ved hjælp af synssansen på et øjeblik opfatte flere objekter samtidigt eller man kan opfatte en hel struktur, denne kognitive funktion kaldes *visualisering*. På sin vis er visualisering det stik modsatte af diskurs, som bygger på en sekvens af enheder - visualisering handler om helheden.

Hvis man ser på en tegning af en fysisk genstand (for eksempel et hus), kan man umiddelbart ved hjælp af vision opfatte hvad man ser, fordi der er visse ligheder mellem tegningen og et fysisk objekt - tegningen kaldes *ikonisk* (ibid 322f). I matematik refererer de semiotiske repræsentationer ikke til fysiske objekter, så selv om man bruger vision til at opfatte formerne af repræsentationerne, bliver man nødt til at bruge visualisering til at forstå det matematiske indhold. Som eksempel giver Duval opfattelsen af grafer: De fleste elever kan ikke forbinde informationen i en graf med kendte definitioner eller informationer i et andet register, men eleverne kan sagtens danne sig et *"naivt holistisk billede af hvordan grafen ser ud, den går op og ned som en vej i bjergene* (ibid 324, min egen oversættelse)*"*. Konklusionen er, at visualisering er en semiotisk proces, som kun kan læres ved at arbejde specifikt med de enkelte registre. Duval giver ikke et svar på hvordan man lærer at visualisere i de enkelte registre, men bemærker som eksempel, at det ikke er nok at konstruere grafer og geometriske figurer for at forstå dem. Årsagen er, at konstruktion er baseret på lokale egenskaber, mens visualisering også er baseret på globale egenskaber.

2.1.2 Operationer og konversioner

Ovenstående katagorisering af semiotiske systemer blev foretaget på baggrund af hvilke kognitive funktioner, der tages i brug, når man foretager transformationer af repræsentationer indenfor det samme semiotiske system. En sådan transformation af repræsentationer indenfor det samme register kaldes på engelsk en "treatment" af Duval, hvilket jeg har valgt at oversætte til *operation*. Hvis en transformation af repræsentationer starter i et register og ender i et andet register, kaldes transformationen for en *konversion*. Med den nye sprogbrug kan man sige, at al matematisk aktivitet består af enten operationer eller konversioner.

Nu er vi i stand til at formulere Duvals hypotese om de to vigtigste kilder til læringsproblemer i matematik:

1. Kompleksiteten af operationer i et multifunktionelt register
2. Konversioner mellem registre

2.1.3 Kompleksiteten af operationer i et multifunktionelt register

Et af de store problemer med de multifunktionelle registre er, at de i sammenligning med de monofunktionelle registre umiddelbart virker mere tilgængelige for eleverne, men da man ikke kan bruge de multifunktionelle registre på samme måde i matematik, som man kan i andre sammenhænge, kommer eleverne på usikker grund. Ifølge Duval (2002a, 7ff) giver elevernes problemer med de multifunktionelle registre anledning til at hovedvægten lægges på de monofunktionelle registre i undervisningen.

2.1.4 Konversioner mellem registre

Duval skelner mellem to typer af konversioner: De kongruente konversioner og de ikke-kongruente konversioner. En konversion er kongruent, når der på oplagt vis er en en-til-en korrespondance mellem elementerne i det ene register og elementerne i det andet register, således at konversionen bare er en oversættelse af element for element (Duval 2006, 112f). Men når der ikke findes en sådan oplagt en-til-en korrespondance mellem elementerne i de to registre, er der tale om en ikke-kongruent konversion, og denne slags konversion giver selvsagt anledning til større problemer hos eleverne end de kongruente konversioner.

Et interessant fænomen er, at sværhedsgraden af en konversion ikke bare afhænger af hvilke to registre, der er implicerede, men også af retningen af konversionen. Det kan sagtens være sådan, at konversionen er lige til at gå til den ene vej og meget vanskelig den anden vej. En observation af mere teoretisk art er, at konversion kræver afstandtagen til det register, hvori det matematiske objekt blev introduceret for eleven. Der sker ofte det, at eleven identificerer det matematiske objekt med en repræsentation i et enkelt register, og enhver konversion vil derfor for eleven resultere i et helt nyt matematisk objekt (Duval 2006, 124).

Nu er vi kommet tilbage til de spørgsmål, der blev stillet i starten: Hvordan lærer man at adskille objektet fra repræsentationerne? Hvordan skal man kunne afgøre hvad der er matematisk relevant i en semiotisk repræsentation? Som svar på spørgsmålene citeres Duval (2006, 125 min egen oversættelse): *”Det er kun ved at undersøge variationer af repræsentationerne i start- og slut-registret, at eleverne kan indse, hvad der er matematisk relevant i en repræsentation, kan udføre konversioner og at eleverne kan adskille det repræsenterede objekt fra indholdet af repræsentationerne.”* En nødvendig betingelse for forståelse af matematik er altså kunne koordinere mindst to registre (Duval 2006, 115 og 126).

2.1.5 Duvals konklusion

Al matematisk aktivitet består af operationer og konversion. De to begreber er ikke helt uafhængige, idet hvert register har sine muligheder og begrænsninger, så man i praksis ofte vælger at foretage en konversion, for at komme til et register, hvor operationerne kan udføres mere effektivt. Konversionerne spiller ingen rolle fra et matematisk synspunkt, men er på alle uddannelsesniveauer en hindring, der skal overvindes, hvis man skal kunne forstå matematikken. Duval (2006) afslutter sin artikel med ordene:
”The true challenge of mathematics education is first to develop the ability to change representation register.”

2.2 Teori om proces/objekt-dualitet

Sfards (1991) udgangspunkt er, at det er gennem filosofisk indsigt i de matematiske begrebers natur, at vi forstår de psykologiske processer, der foregår, når et nyt begreb skal tilegnes. Det er Sfards hovedidé, at alle matematiske begreber kan opfattes på to måder (Sfard 1991, 4):

1. Proces-opfattelse
2. Objekt-opfattelse

En proces-opfattelse er en dynamisk synsvinkel, hvor det matematiske begreb betragtes som en proces eller en potentiel proces. En objekt-opfattelse er derimod en statisk opfattelse af et matematisk begreb som et matematisk objekt, der kan overskues i et øjebliksbillede. De to måder at opfatte matematiske begreber på er komplementære: Når man tænker på den ene måde, kan man ikke tænke på den anden måde, men tilsammen giver de to tænkemåder en fuldstændig beskrivelse af de matematiske begreber, og komplekse problemer løses altid ved at skifte frem og tilbage mellem proces-opfattelsen og objekt-opfattelsen. Sfard argumenterer for, at proces-opfattelsen har en tendens til at gå forud for objekt-opfattelsen, derfor analyserer Sfard nogle af de centrale matematiske begreber i et historisk perspektiv.

Sfard postulerer, at det er den generelle tendens, at de matematiske begreber historisk set kommer frem i form af processer og ender som objekter, men gør samtidig opmærksom på, at der er undtagelser. Et eksempel på en undtagelse er geometri, hvor repræsentationernes materielle karakter gør den objekt-opfattelsen ganske naturlig (Sfard 1991, 10). I det hele taget har karakteren af de tilgængelige repræsentationer historisk set haft en betydning for om de matematiske begreber er blevet opfattet som processer eller som objekter. Sfard giver som eksempel indførslen af tallinjen, som havde stor betydning for, at de reelle tal blev opfattet som et objekt. Hvis man i stedet for de specifikke matematiske begreber betragter matematikkens udvikling som helhed, argumenterer Sfard for, at der også her er en tendens til at starte med proces-opfattelsen og slutte med objekt-opfattelsen. De to ekstremer tages op: Oldtidens matematik var udelukkende proces-orienteret, mens matematikken i det 20. århundrede er indbegrebet af den strukturelle opfattelse (Sfard 1991, 23f).

Sfard sammenligner ovenstående historiske udvikling med individets tilegnelse af et matematisk begreb og konkluderer, at der også for det enkelte individ er en tendens til at proces-opfattelsen kommer før den objekt-opfattelsen. Også her gør Sfard opmærksom på, at der kun er tale om en tendens - der findes undtagelser – og også her gør Sfard opmærksom på, at nogle repræsentationer har et mere objekt-orienteret præg end andre. Det kan ligefrem være til ulempe for eleverne, hvis et matematisk begreb identificeres med en enkelt objektpræget repræsentation, fordi det objekt, som eleven ”ser” er er en ufuldstændig version af det ”rigtige” objekt (Sfard 1991, 21).

Sfard identificerer ved hjælp af ovenstående analyse af de matematiske begrebers historiske udvikling tre faser i dannelsen af et matematisk begreb og de tre faser overføres til det enkelte individs opfattelse af et matematisk begreb (Sfard 1991, 18f):

1. Interiorization
2. Condensation
3. Reification

Interiorization er den gradvise proces der sker, når individet bliver mere og mere fortrolig med de operationer, som senere giver anledning til det nye matematiske begreb. Når man kan analysere operationerne udefra uden faktisk at udføre dem, er man kommet videre til den næste fase, som er condensation. I denne fase, som også foregår gradvist, bliver individet i højere og højere grad i stand til at tænke på en givet proces som en helhed – uden at gå i detaljer med andet end input og output. Den tredje fase (reification) adskiller sig fra de andre to faser ved at ikke at foregå gradvist. Det er ”*et ontologisk skift, hvor en velkendt proces pludselig ses i et helt andet lys*” (Sfard 1991, 19 min egen oversættelse), nemlig som et objekt.

Reification kommer sjældent på kommando, oftest kommer reificationen forsinket og på et uventet tidspunkt. Men hvorfor kan man ikke bare lære eleverne de nødvendige teknikker, der skal bruges i processerne og derefter fortælle eleverne om de matematiske objekter og derved fremprovokere reifikation? Årsagen er følgende onde cirkel: For at lære det matematiske objekt at kende er det nødvendigt at forstå teknikkerne, men for at forstå teknikkerne er det nødvendigt at have et kendskab til det matematiske objekt. Sfard nævner i den forbindelse, at man i den traditionelle matematikundervisning oftest introducerer begreberne som objekter, men alligevel fortolkes de strukturelle definitioner ofte som processer af eleverne (Sfard 1991, 23).

Sfard konkluderer, at der ikke er en nem vej for reifikation for eleverne, nogle opnår det aldrig, men at man for at forbedre matematikundervisningen må forsøge at bryde den nævnte onde cirkel og stimulere reifikation.

2.3 Problemformulering nummer et

Da jeg under a priorianalysen og i begyndelsen af designfasen tog beslutninger, som efterhånden indsnævrede problemstillingen, ville det være i strid med mine tanker undervejs, hvis jeg angav en endelig problemformulering allerede her. I stedet vil jeg angive flere problemformuleringer med stigende præcision, den første kommer herunder.

Før jeg skriver selve problemformuleringen vil jeg komme med en meget vigtig bemærkning om, hvad Duval vil med sin teori om semiotiske repræsentationer, og om hvordan jeg bruger Duvals teori i dette speciale. Duvals teori er ikke lavet til at skulle bruges direkte til design af undervisningsforløb. Teorien er derimod en beskrivelse af hvad der er de vigtigste kilder til læringsvanskeligheder set fra et psykologisk perspektiv, og der gives ikke præcise løsninger på de problemer, der opstilles, andet end at en nødvendig forudsætning for en elevs matematisk forståelse er at eleven lærer at foretage konversioner og lærer at koordinere registre (jævnfør afsnit 2.1.4 og 2.1.5). Jeg vil tilføje, at det derudover er helt grundlæggende, at eleverne lærer de enkelte registre at kende, ethvert register har jo ifølge Duval sine helt egne muligheder (jævnfør afsnit 2.1).

Da emnet variabelsammenhænge på C-niveau i gymnasiet ifølge bekendtgørelsen i høj grad består af at lære tabeller, grafer og ligninger at kende, at kunne konvertere mellem dem og at koordinere dem for nogle simple typer af funktioner (hvilket uddybes senere i afsnit 3.8 om bekendtgørelsen), har jeg valgt at bruge Duvals teori til at give struktur i mit design. Målet med forløbet er et lære de enkelte registre at kende og at lære at udføre konversioner for en række konkrete funktioner, samt at arbejde med koordination af registre. Sammenlignet med den traditionelle undervisning, hvor funktionerne bliver gennemgået efter type, vil jeg inddrage en ekstra ”dimension,” så der systematisk arbejdes både med typer af funktioner og med konversioner.

Duvals teori giver ikke belæg for at mit design vil føre til at eleverne bliver fleksible opgaveløsere, som kan foretage konversioner til det register, hvor den enkelte opgave løses mest effektivt, eller til at eleverne ville få en objektopfattelse af funktionsbegrebet, men det anså jeg heller ikke for at være et realistisk mål for gymnasieelever, som kun har valgt matematik på C-niveau. Jeg havde fra starten af en forventning om at en del af eleverne i forsøgsklassen ville have problemer med fundamentale egenskaber ved tabeller, grafer og ligninger, som ellers er pensum i folkeskolen, og valgte som det primære mål at prøve at få alle elever med i undervisningen. Ved specifikt at arbejde med egenskaberne ved de enkelte registre, med konversioner samt koordination mellem registre og ved at være bevidst om valget af registre til at fremhæve egenskaber ved de nye typer af sammenhænge, sigtede jeg efter at hæve bundniveauet i klassen.

En anden vigtig bemærkning er, at jeg fra starten valgte, at jeg ikke ville fokusere på spillet mellem lærer og elever i klasseværelset, og at jeg ikke som en del af dette speciale ville planlægge eller analysere de enkelte timer i store detaljer, hvilket skyldes min dobbeltrolle som forsøgsklassen lærer og forsker/observatør. I stedet ville jeg teste elevernes forudsætninger før forløbet, design et undervisningsforløb, som tog hensyn til disse forudsætninger og analysere slutresultatet. Dette sammenfattes i den første problemformulering:

Problemformulering nummer et

Formålet med specialet er at designe et undervisningsforløb om eksponentielle sammenhænge og potens-sammenhænge på gymnasiets C-niveau. Der tages udgangspunkt i Duvals teori om semiotiske repræsentationer med fokus på følgende punkter:

- *Analyse af elevernes forudsætninger for brug af det numeriske, grafiske og symbolske register før forløbet.*
- *Design af opgaver og tilhørende undervisningsmateriale om eksponentielle og potens-sammenhænge, som tager hensyn til elevernes forudsætninger i de tre registre og som systematisk behandler alle 6 mulige konversioner mellem de tre registre for begge typer af variabelsammenhænge.*
- *Analyse af elevernes skriftlige arbejde med henblik på at undersøge om eleverne forbedrede eventuelle problemer med de tre registre og om eleverne efter forløbet var i stand til at udføre de konkrete konversioner for de to givne typer af sammenhænge.*

3 A priori analyse

I dette kapitel vil jeg med min semiotiske tilgang behandle funktionsbegrebet i matematikundervisningen. Jeg vil foretage en kort epistemologisk analyse af begrebet ”en variabelsammenhæng”, hvilket blandt andet fører til en definition af en variabelsammenhæng, jeg vil beskrive litteraturens behandling af elevernes typiske misforståelser i forbindelse med funktionsbegrebet, og jeg vil give en teoretisk baggrund for en covarians-tilgang til funktioner, som passer til bekendtgørelsens formelle krav.

3.1 Korrespondance og covariation, funktioner før og efter reformen.

I undervisningen kan man gribe funktionsbegrebet an på to måder, som kaldes *korrespondance-tilgangen* og *covariation-tilgangen* (Slavit 1997, 262f). Med korrespondance-tilgangen fokuseres der på par af input- og output-variable, hvor der til hver input-variabel *korreponderer* præcis én output-variabel. Med covariation-tilgangen fokuseres der på vækstegenskaber og ændringer af de to variable, hvad sker der med den ene variabel, når der *varieres* lidt på den anden variabel? På samme måde som funktionsbegrebet var intuitivt og uformelt for et par hundrede år siden, er covarians-tilgangen heller ikke veldefineret.

Matematikundervisningen om funktioner har indtil for nyligt hovedsageligt været baseret på en korrespondancetilgang i de danske gymnasier. I standard-lærebøgerne af Carstensen og Frandsen (1997, 199ff) introduceres eleverne i 1.G til definitionsmængde og værdimængde og en formel definition af en funktion, som dog er skrevet med ord og ikke i et formaliseret sprog. En række eksempler på simple funktioner bliver gennemgået, og det abstrakte funktionsbegreb gør det muligt at definere injektivitet, sammensatte funktioner og omvendte funktioner.

Efter gymnasiereformen i Danmark skal alle gymnasieelever har matematik på mindst C-niveau, og nu har man fra ministeriets side valgt, at en korrespondancetilgangen ikke længere er nødvendig, og man anbefaler en covarians-tilgang. I bekendtgørelsen (*Bekendtgørelsens bilag 36 Stx, december 2004)* beskrives kernestoffet, jeg har udvalgt de dele, der har relation til funktionsbegrebet:

- *"Formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable."*
- *"xy -plot af datamateriale samt karakteristiske egenskaber ved lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge, anvendelse af regression."*

Under faglige mål står der blandt andet:

- *"[Eleverne skal kunne]... håndtere simple formler, herunder oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog og kunne anvende symbolholdigt sprog til at løse simple problemer med matematisk indhold."*

- *"[Eleverne skal kunne]...anvende variabelsammenhænge i modellering af givne data, kunne foretage fremskrivninger og forholde sig reflekterende til disse samt til rækkevidde af modellerne."*

Bemærk at ordet funktion ikke indgår overhovedet, men at ordene *variabelsammenhænge* og *sammenhænge* bruges flere steder, uden en præcis definition.

Covarians-tilgangen afspejles i lærebogen *Gyldendals Gymnasiematematik Grundbog C* (Clausen et al. 2005, 32f), hvor funktioner behandles under overskriften "Variabelsammenhænge og vækst" (kapitel 2). Der er ingen formel definition af hvad en variabelsammenhæng er, men kapitlet starter med en beskrivelse af hvor nyttig matematikken er i naturvidenskaben, efterfulgt af definitioner af afhængige og uafhængige variable. Derefter bliver der vist en lang række eksempler på hvordan variabelsammenhænge i form af ligninger kan bruges til at beskrive en lang række fænomener, og senere behandles også grafer, tabeller og brugen af naturligt sprog. En variabelsammenhæng defineres altså implicit som en ligning, der kan beskrive et fænomen. Det funktionsbegreb, som man nu underviser i på gymnasiet på C-niveau, har således langt mere til fælles med det primitive funktionsbegreb fra det 17. og 18. århundrede end det har til fælles med det moderne funktionsbegreb. Dette ledte mig til at foretage et lille studie af funktionsbegrebet i et historisk perspektiv, hvilket bringes i næste afsnit.

3.2 Funktionsbegrebet i et historisk perspektiv.

I matematikundervisningen er det traditionelt sådan, at læreren præsenterer det "færdige produkt", det vil sige den matematik, der er resultatet af århundreders forskning. Årsagen er vel, at man som matematiker ikke vil lade sig nøje med at gennemgå et par specialtilfælde, men meget hellere vil vise hvor generelle de matematiske teorier er. Noget af det, der gør matematikken så speciel er jo, at man ved at formulere sig abstrakt, kan komme frem til nogle meget generelle teorier. Det er altså ikke af nødvendighed, at eleverne lærer det færdige produkt, det er mere på grund af den matematiske stolthed og tradition.

Når man tænker på hvor mange problemer gymnasieeleverne har med at forstå den mængdebaserede definition af funktioner, er det oplagt at spørge, om man som matematiklærer ikke kan sluge sin matematiske stolthed og nøjes med et mere primitivt funktionsbegreb til at starte med, og så generalisere efterhånden som man får brug for det? Hvorfor er det overhovedet nødvendigt at bruge mængder til at definere funktioner? Hvis man skal kunne forstå hvordan det moderne funktionsbegreb opstod, og hvis man gerne vil studere alternative definitioner af funktioner, er det oplagt at se på funktionsbegrebet i et historisk perspektiv. I dette afsnit søger jeg at besvare følgende spørgsmål: *Hvordan har definitionen af en funktion ændret sig gennem tiderne?*

3.2.1 Det primitive funktionsbegreb i perioden cirka 1450 til cirka 1700.

Lad mig starte med at slå fast, at ordet funktion blev brugt for første gang i slutningen af det 17. århundrede, så strengt taget blev funktionsbegrebet opfundet på dette tidspunkt! Jeg vil dog tillade mig i det følgende at bruge ordet funktion om de funktionslignende matematiske begeber, som blev brugt før år 1700 og vil i det følgende fokusere på udviklingen fra cirka 1450 til 1900.

I perioden cirka 1450-1650 var naturvidenskaben i kraftig udvikling og mange af hovedpersonerne var både fysikere og matematikere, hvilket var medvirkende til at der ikke var et klart skel mellem matematik og fysik. Galileo mente, at matematikken var det bedste redskab til at beskrive naturen så simpelt som muligt, og her spiller funktioner en central rolle. Man kan sige, at funktioner er udviklet som det nødvendige matematiske værktøj til at give en kvantitativ beskrivelse af naturen. João Pedro Ponte formulerer det sådan, at funktionsbegrebet oprindeligt var tæt knyttet til begrebet *naturlov (*Ponte 1992, 4f). Ifølge Ponte havde det primitive funktionsbegreb i det 17. (og 18.) århundrede følgende tre essentielle elementer:

1. Den algebraiske notation

2. Den geometriske repræsentation
3. Forbindelsen til konkrete fysiske problemstillinger

I starten af perioden var en funktion således identificeret med et analytisk udtryk, alle funktioner havde en (forholdsvis) simpel geometrisk repræsentation og man betragtede primært funktioner, som havde relation til fysiske problemer. Vi vil se, hvordan man i løbet af de næste par århundreder efterhånden droppede alle tre krav og gjorde funktionsbegrebet helt abstrakt.

Den første gang ordet funktion er nævnt i (matematik)litteraturen er i 1673 af Leibniz, hvor en funktion beskriver visse geometriske størrelser, som subnormal, subtangent osv, eksempelvis: En tangent er en funktion af en kurve (Kleiner 1989, 2). Leibniz og Bernoulli blev i perioden 1694-1698 enige om at bruge ordet funktion til at stå for en afhængighed af én variabel (Ponte 1992, 2), her er den første egentlige definition af en funktion:
"Johann Bernoulli, in a letter to Leibniz written on 2 September 1694, described a function as:- ... a quantity somehow formed from indeterminate and constant quantities." (citatet stammer fra MacTutor: O´Connor og Robertson 2005)

3.2.2 Funktionsbegrebet i perioden cirka 1720-1820

Den matematiske analyse var i kraftig udvikling i denne periode, blandt andet inspiret af fysiske problemer, som varmeledning og problemet om den vibrerende streng. Funktionsbegrebet var i konstant forandring, først var det et analytisk udtryk, senere en kurve (tegnet med fri hånd) og senere igen en analytisk formel, men denne gang en Fourier-række (Kleiner 1989, 9). I 1748 udgav Euler *Introductio in analysin infinitorum*, hvor funktionsbegrebet var fundamentet for hans præsentation af analysen. Euler definerede en funktion som følger:

A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any way whatsoever of the variable quantity and numbers or constant quantities (fra MacTutor: O´Connor og Robertson 2005, 3).

Euler definerer ikke begrebet ”analytisk udtryk” helt præcist, men skriver at det dækker over de 4 sædvanlige regneoperationer, rødder, eksponentialer, logaritmer, trigonometriske sammenhænge, afledte og integraler. Euler klasssificerede funktioner som algebraiske eller trancendentale, entydige (single-valued) eller flertydige (multivalued), eksplicitte eller implicitte. Det skal også bemærkes, at Euler slet ikke brugte geometriske repræsentationer (Kleiner 1989, 3). Ifølge Connor og Robinson (2005) havde man før Euler betragtet sinus, cosinus og tangens som linjestykker, der havde forbindelse til en cirkel, for Euler var det funktioner på lige fod med andre analytiske udtryk.

3.2.3 Funktionsbegrebet i perioden cirka 1820-1900

Kendetegnende for denne periode er, at man tager afsked med funktionsbegrebets forbindelse til fysiske problemstillinger. Dirichlet definerede i 1837 en funktion som en arbitrær korrespondance mellem variable, som repræsenterer tal, hvor der til den uafhængige variabel svarer præcis ét tal. Dirichlet nævnte som et eksempel på en funktion *D(x)*, den regel, hvor værdien er *0* for et rationelt tal og *1* for et irrationelt tal (Ponte 1992, 3).

I det 19. århundrede var funktionsbegrebet ved at miste jordforbindelsen. På den ene side var det nødvendigt at give en abstrakt definition, fordi der ikke måtte være uklarheder i analysens fundament, men på den anden side førte de abstrakte funktioner til eksempler på funktioner, som var meget lidt intuitive. I slutningen af det 19. århundrede kom mængdelæren frem som et bud på matematikkens grundlag, og som følge heraf begyndte man at give mængdeteoretiske definitioner af funktioner. Her er Cantors (1845-1918) definition:

En funktion er en arbitrær korrespondance mellem mængder, hvor entydigheden er opfyldt (Ponte 1992, 3).

3.2.4 Konklusion

Vejen til den nuværende definition af en funktion har været lang og snørklet, og mange store matematikere har været uenige om hvordan man skulle gribe sagen an. Derfor kan det ikke overraske, at nutidens gymnasieelever også har svært ved at forstå hvad der er en funktion, og hvad der ikke er en funktion. Godt nok præsenterer man ikke (i Danmark) eleverne for den mest formelle definition af en funktion, men det er en definition, der i sin form minder om Cantors definition fra slutningen af det 19. århundrede, og den er mere abstrakt end al den matematik, som en gymnasieelev i 1.G. vil have stødt på i matematiktimerne hidtil. Kan man inspireret af den historiske gennemgang komme med forslag til en definition af en funktion, som er mindre abstrakt end den moderne definition, men som samtidig er tilstrækkelige til at kunne bruges i de øvrige naturvidenskabelige fag i gymnasiet?

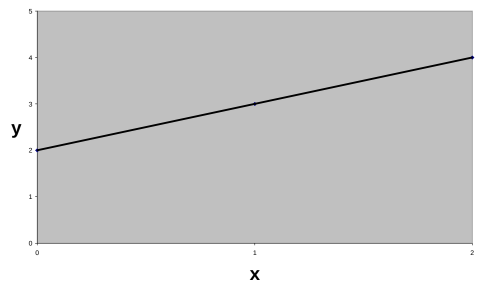
Hvis man ser på det primitive funktionsbegrebs tre elementer, som blev nævnt i afsnit 3.2.1, kan man overveje hvor vigtige de hver især er for gymnasiets matematikundervisning. For det første spiller anvendelserne i de øvrige naturvidenskabelige fag en stor rolle, det virker som et fornuftigt krav, at man fokuserer på funktioner, som kan bruges til noget. For det andet vil man ikke være alvorligt hæmmet af at man begrænser sig til at se på funktioner, der er givet ved et enkelt analytisk udtryk, muligvis kan man også definere stykkevis definerede funktioner. Det tredje element – den geometriske forbindelse – skal ses i et lidt andet lys nu end i det 17. århundrede. For eksempel er det nævnt tidligere, hvordan Leibniz betragtede tangenten som en funktion af en kurve. Jeg tror ikke, at ret mange synes, at det er en god idé at lade den geometriske repræsentation træde i forgrunden i funktionsbegrebet, men jeg tror, at alle er enige om, at grafer spiller en vigtig rolle i gymnasiets matematikundervisning og jeg kan ikke komme i tanke om en vigtig funktion i gymnasieundervisningen, som ikke har en simpel graf.

Det funktionsbegreb, som man har brug for i gymnasiet, har altså langt mere til fælles med det primitive funktionsbegreb fra det 17. og 18. århundrede end det har til fælles med det moderne funktionsbegreb. Spørgsmålet er bare om vi er villige til at give afkald på den del af den matematiske kultur, der ligger gemt i det moderne funktionsbegreb?

3.3 Oversigt over registre for funktioner

Formålet med dette afsnit er at give en kort oversigt over de hyppigst anvendte typer af repræsentationer for funktioner. I matematikundervisningen støder man på mange forskellige slags repræsentationer for funktioner: Formeludtryk, grafer og tabeller, ”maskiner” med input og output, mængdediagrammer og endelig må man ikke glemme funktioner udtrykt ved hjælp af naturligt sprog (se et par eksempler i nedenståendeFigur 3-1). Det er for dette speciale vigtigt at skelne mellem repræsentationer, der kan bruges i forbindelse med variabelsammenhænge og repræsentationer, der hører til funktionsbegrebet. Grunden til at jeg ovenfor brugte ordet formeludtryk var, at jeg ville dække både ligninger for variabelsammenhænge (oftest på formen $y = \ldots$) og funktionsforskrifter (på formen $f(x) = \ldots$). Grafer, tabeller og naturligt sprog giver mening for både variabelsammenhænge og funktioner, mens ”maskiner” med input og output er tæt knyttede til funktionsbegrebet, dog uden at man kan udelukke at maskiner kan være nyttige til at repræsentere variabelsammenhænge. Mængdediagrammer, med pile mellem definitions- og værdimængde bruges selvsagt udelukkende i forbindelse med funktionsbegrebet.

Da dette speciale prmært handler om variabelsammenhænge, har jeg valgt at fokusere på de repræsentationer, der ikke knytter sig til funktionsbegrebet det vil sige ligninger, grafer tabeller og til dels naturligt sprog. Med Duvals terminologi betragter vi altså det symbolske, grafiske, og numeriske register, samt registret naturligt sprog.

<table>
<tr><th>Register</th><th>Eksempel på repræsentation for funktion</th></tr>
<tr><td>Symbolsk</td><td>$y = x + 2$ eller
$f(x) = x + 2$</td></tr>
<tr><td>Grafisk</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Numerisk</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Naturligt sprog</td><td>”y er altid to større end x” eller
”y findes ved at lægge to til x”</td></tr>
</table>

Figur 3-1

3.4 Mulighederne og begrænsningerne ved de enkelte registre

I afsnit 2.1 skrev jeg, at de enkelte registre ifølge Duval har sine egne muligheder. I den traditionelle matematikundervisning behandles nogle af de generelle karakteristika ved registrene eksplicit, som for eksempel hvordan man aflæser koordinater til punkter i et koordinatsystem, men flere karakteristika ved registrene behandles kun implicit. Eksempelvis er detefter min opfattelse ikke standard at undervise i hvordan det er muligt at skalere akserne i et koordinatsystem eller at gå i detaljer med ækvivalens af ligninger. I det følgende vil jeg søge eksplicit at identificere mulighederne og begrænsningerne ved repræsentationer for funktioner i det symbolske, grafiske, numeriske register.

Det symbolske, grafiske og numeriske register er i forbindelse med funktioner ikke bare ”parallelle” registre, som indeholder præcis de samme oplysninger i forskellig forklædning. I en artikel om funktioner i et IT-miljø indenfor det symbolske, grafiske og numeriske register af Schwarz og Dreyfus (1995, 267) opstilles tre grundlæggende kompetancer. De første to kompetancer er at kunne udføre operationer og konversioner, mens den tredje er, at kunne forholde sig til det faktum at repræsentationer er partielle i den forstand, at en repræsentation sjældent indeholder den fuldstændige information om det matematiske objekt. Schwarz og Dreyfus´ artikel danner fundamentet for gennemgangen af de tre registre.

3.4.1 Det symbolske register.

Det symbolske register er traditionelt det vigtigste register i matematikundervisningen og en stor del af undervisningen handler om at lave operationer i det symbolske register. Årsagen er, at det symbolske register er det mest præcise, fleksible register og et utal af operationer er mulige her. De fleste vil nok også hævde, at det symbolske register er det mest fuldstændige register til at beskrive funktioner, idet en forskrift eller ligning sammen med en definitionsmængde indeholder den fuldstændige information om en givet funktion. Schwarz og Dreyfus (1995, 262f) har dog to indvendinger:

For det første er der ingen entydig formel til at beskrive en givet funktion, for eksempel er $f(x)=4x-12$ og $f(x)=4(x-3)$ repræsentationer for den samme funktion, og det samme er $f(x)=|x|$ og $f(x)=\sqrt{x^2}$. I begge tilfælde kan man med en passende operation i det symbolske register overbevise sig selv om, at der er tale om to ækvivalente algebraiske udtryk, men der kan ske det, at eleven ikke ”ser” det samme objekt bagved de to udtryk, således at eleven opfatter dem som to adskilte objekter. Jeg vil tilføje til Schwarz og Dreyfus´ eksempler, at der for nogle funktionsfamilier er konventioner om hvad der er den pæneste måde at skrive forskriften på (for eksempel potenser af højeste grad først), men generelt afhænger valget af repræsentation af sammenhængen. Konklusionen er, at selv i det mest fuldstændige register, er der ikke en unik måde at repræsentere en funktion på.

For det andet glemmer man i praksis tit at angive en definitionsmængde til en funktion, hvilket kan føre til tvetydigheder, er for eksempel udtrykkene $f(x) = x + 3$ og $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)}$ ens? Svaret afhænger af definitionsmængderne for de to funktioner.

3.4.2 Det grafiske register.

Først vil jeg gøre opmærksom på at selve ordet graf bruges på to måder i matematik. Enten kan man bruge ordet graf for en konkret repræsentation af en funktion – for eksempel på et stykke papir – eller man kan tale om den matematiske graf, der er en abstrakt mængde bestående af punkterne på formen $(x, f(x))$ i planen. Der er to grunde til, at en konkret graf ikke kan give alle informationer om den repræsenterede funktion.

Den første grund er, at definitionsmængden som regel ikke er begrænset, så man kan kun se et udsnit af grafen. Hvordan ved man, hvad der sker med grafen udenfor det ”vindue”, man ser på? Schwarz og Dreyfus (1995, 262) giver som eksempler funktionerne $f(x) = x(x + |x|)/2$ og $g(x) = x^2$, hvis grafer stemmer overens i alle intervaller, der er indeholdt i de positive reelle tal, men som er forskellige for de negative reelle tal.

Den anden grund til at grafer ikke kan give alle informationer om den repræsenterede funktion er, at der er grænser for hvor nøjagtigt en graf kan tegnes. Schwarz og Dreyfus (1995, 262) giver som eksempel graferne for de forskellige funktioner $f(x) = 1/(1 + x)$ og $g(x) = 1 - x + x^2$, hvis grafer ser ens ud i et lille interval omkring origo.

Schwarz og Dreyfus (1995, 265) skelner mellem to slags operationer, man kan foretage med en repræsentation for en funktion. Den ene slags operation ændrer på selve funktionen (det matematiske objekt), mens den anden kun ændrer på repræsentationen. I det grafiske tilfælde er parallelforskydninger, rotationer og spejlinger de mest hyppige eksempler på den første type af operation. Både den konkrete graf og den matematiske graf ændres. Men en skalering af akserne på en graf ændrer ikke på den matematiske graf, kun på repræsentationen. Problemet er for eleverne, at i alle tilfælde vil den konkrete graf ændres, hvis der foretages en operation i form af en parallelforskydning, skalering eller lignende, men det matematiske objekt vil ikke altid ændres. Dette fører os tilbage til et af Duvals spørgsmål fra teoriafsnittet (2.1): Hvordan kan eleven se hvad der er matematisk relevant eller ej i en repræsentation?

Nyttigheden af grafer hænger sammen med, at det grafiske register er ikke-diskursivt. I visse sammenhænge kan det være svært at få overblik ved hjælp af det symbolske register – som jo er diskursivt – og man vælger derfor af foretage en konversion til det grafiske register for at få globale egenskaber ved funktioner tydeligere frem.

3.4.3 Det numeriske register.

Schwarz og Dreyfus (1995, 263) sammenligner brugen af det symbolske, grafiske og numeriske register i den traditionelle matematikundervisning og konkluderer, at man bruger det symbolske register som et ”action notations-system”, og de to andre registre som ”display notations-systemer.” Det skal forstås sådan, at det eneste register, man egentlig lærer at foretage operationer i, er det symbolske, mens de to andre registre giver en slags statiske ”billeder” af funktioner. Man kan diskutere, om man traditionelt lærer eleverne at lave operationer på grafer eller ej, men der er vist ingen tvivl om, at det er sjældent, at matematikundervisningen beskæftiger sig med operationer på tabeller. Det er jo også begrænset, hvad man kan lave af operationer på tabeller, Schwarz og Dreyfus (1995, 271) nævner som den eneste operation ordning af en tabel, for eksempel efter voksende *x*-værdier.

Da en tabel kun indeholder endeligt mange talpar, og de fleste interessante funktioner har en uendelig stor definitionsmængde, kan man i høj grad sige, at en tabel kun indeholder den partielle information om en funktion. Schwarz og Dreyfus (1995, 261f) giver som eksempel tabellen:

x	-1	0	1
y	-1	0	1

Ligningerne $y = x$, $y = x^n$ (n ulige), $y = \sin(\pi x/2)$ passer alle til tabellen.

På samme måde som der findes ækvivalente ligninger, der hører til samme funktion, findes der også ækvivalente tabeller, der hører til samme funktion. For eksempel er kan følgende tabeller begge opfattes som repræsentationer for den samme funktion.

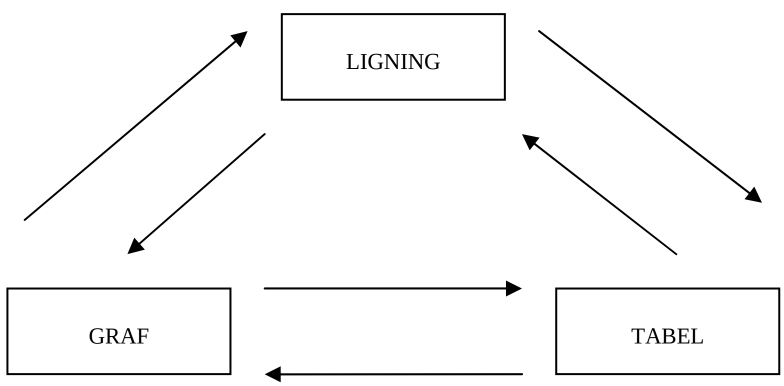
x	0	1	2
y	0	2	4

x	3	4	5
y	6	8	10

Desuden er det jo et faktum, at rækkefølgen af talparrene i en tabel er underordnet.

3.5 Konversioner mellem ligning, graf og tabel.

Der er i alt 6 mulige konversioner mellem ligning, graf og tabel, se Figur 3-2. Formålet med dette afsnit er at undersøge. om hver af disse 6 konversioner generelt er kongruente eller ikke-kongruente (jævnfør afsnit 2.1.4, hvor kongruens behandles).



Figur 3-2

3.5.1 Konversioner mellem graf og ligning

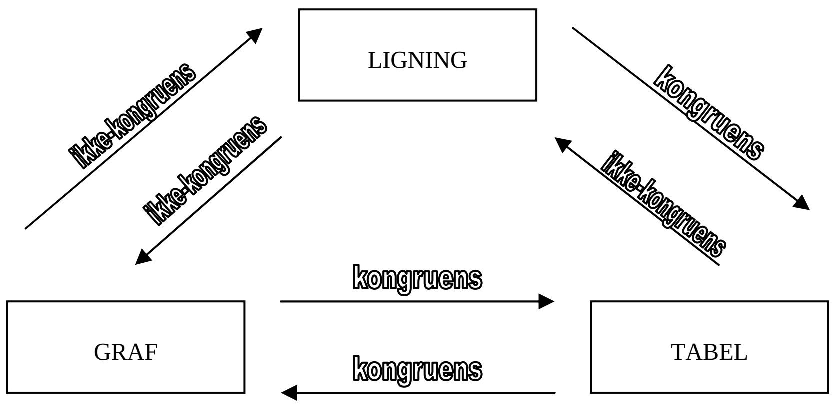
Jeg vil starte med den observation, at der (når man ser bort fra at der kun er endeligt mange talpar i en tabel) findes en en-til-en korrespondance mellem punkterne på en graf og talparrene i en tabel. Det betyder, at konversionen fra graf til tabel altid er kongruent, og at man altid nemt kan afsætte punkter fra en tabel i et koordinatsystem. Med Duvals ord er konversionen mellem graf og ligning reversibel – det er lige så nemt at gå den ene vej som den anden vej (Duval 2006, 123). Da en tabel som nævnt i afsnit 3.4.3 kun indeholder den partielle information om en funktion, er det derimod ikke oplagt hvordan man forbinder et antal punkter i et koordinatsystem, man har generelt brug for yderligere information om typen af funktion, definitionsmængde, ekstremumspunkter og asymptoter. I simple tilfælde, som i gymnasiets matematik på C-niveau, er de funktioner, man betragter, dog så pæne (monotone, ingen diskontinuiteter), at jeg vil gå med til at sige, at konversionen fra tabel til graf er kongruent.

3.5.2 Konversioner mellem ligning og tabel

Hvis den rigtige variabel er isoleret i ligningen, er konversionen fra ligning til tabel kongruent, idet hvert talpar i tabellen kan identificeres med koordinatsættene $(x_n, f(x_n))$. Ellers er det nødvendigt at lave en operation før konversionen og her kan eleven støde på problemer, for eksempel hvis x skal isoleres i udtrykket $y = b \cdot a^x$, og eleven endnu ikke har lært om logaritmer. Givet en type af funktion og et tilstrækkeligt antal punkter, vil der som regel kun være én ligning, der opfylder betingelserne, men måden hvorpå man finder frem til ligningen, varierer fra gang til gang. Konversionen fra tabel til ligning er generelt ikke-kongruent. Da konversionen mellem ligning og tabel er kongruent den ene vej og ikke-kongruent den anden vej, er der tale om en ikke-reversibel konversion (Duval 2006, 123).

3.5.3 Konversioner mellem graf og ligning

Der findes to metoder til at foretage konversioner mellem graf og ligning: Enten bruges det numeriske register til mellemregning, ellers går man den direkte vej. Med den direkte vej menes, at et kendskab til den grafiske tolkning af koefficienterne i ligningen (for eksempel for lineære sammenhænge) gør, at man ikke behøver at lave en tabel, når man skal konvertere enten til eller fra en ligning. Desværre vil den grafiske tolkning af koefficienterne selvfølgelig være knyttet til hvilken type af funktion , der er tale om, så der kan ikke laves universelle regler om konversionerne den direkte vej mellem graf og ligning og de er derfor ikke-kongruente. Resultaterne opsummeres i Figur 3-3:



Figur 3-3

På figuren kan man se, at konversionerne fra graf til ligning og fra tabel til ligning skiller sig ud, da hverken den direkte konversion eller konversioner via det numeriske register er kongruente (sammensætning af to kongruente konversioner giver en kongruent konversion).

3.6 Elevernes opfattelser af funktioner

Efter at have sat scenen med en analyse af de tre vigtigste registre og konversionerne mellem dem, vil jeg nu se på funktionsbegrebet fra elevernes synsvinkel. Hvilke typer af misforståelser forekommer blandt eleverne? Først ser jeg på misforståelser af funktionsbegrebet, der knytter sig til et enkelt register, og derefter jeg ser på mere overordnede misforståelser, der går på tværs af alle registre.

Inden jeg går i gang med at beskrive elevernes typiske misforståelser i forbindelse med ligninger, grafer og tabeller, vil jeg dog indskyde en vigtig bemærkning. Selv om lærebogen og læreren anvender et vist antal ”officielle” repræsentationer for funktioner, vil der ofte ske det, at eleverne opfinder deres egne repræsentationer, som er nyttige under løsningen af konkrete opgaver. Hitt (2002, 251f) sammenligner to skoleelevers løsninger af et wordproblem, den ene elev på 11 år opfinder en figur, der for hende indeholder essensen af problemet og som giver den korrekte løsning, mens den anden elev på 14 år giver en inkonsistent løsning i det symbolske register. Hitt konkluderer at den 14-årige elev, følte sig bundet til at bruge det symbolske register, fordi undervisningen havde fokuseret på dette, men eleven var ikke i stand til at konvertere opgavens centrale oplysninger til ligninger. Den 11-årige elev kunne derimod ved selv at vælge en passende (personlig) repræsentation kontrollere løsningsprocessen og overføre opgavens centrale oplysninger til sin repræsentation.

3.6.1 Elevernes misforståelser af ligninger.

Med proces/objekt-dualiteten (jævnfør afsnit 2.2) som det teoretiske redskab, vil jeg nu kaste et blik på elevernes opfattelser af ligninger. For at kunne forstå gymnasieelevers opfattelse af ligninger er det nødvendigt at se på elevernes opfattelse af selve lighedstegnet. På baggrund af artiklen *Concepts associated with the equality symbol* af Kieran (1981) vil jeg i det følgende gennemgå hvordan skolebørn på forskellige klassetrin bruger lighedstegnet og vil komme frem hvordan nogle misforståelser bliver hængende selv for gymnasieelever og universitetsstuderende.

Et lighedstegn kan opfattes på to måder: Som et ”do something-signal” eller som et ækvivalens-symbol (Kieran 1981, 317ff), svarende til henholdsvis en proces og en objekt-opfattelse. Kieran beskriver hvordan elever på de laveste klassetrin hurtigt lærer at bruge de aritmetiske symboler + og =, men at de ikke nødvendigvis opfatter dem på samme måde som os. Stillet overfor udtrykket $(\textit{ingenting}) = 3 + 4$ udbrød en elev i en undersøgelse: ”Læser du baglæns,” og rettede det til $4 + 3 = (\textit{ingenting})$. I samme undersøgelse kunne skolebørnene ikke forklare ligninger som $3 = 3$ eller $4 + 5 = 3 + 6$. ”Efter lighedstegnet skal svaret stå,” var et hyppigt svar, og dette forklarer hvad der menes med lighedstegnet som et ”do something-signal.” Selv børn i alderen 12-14 år forbinder oftest lighedstegnet med et resultat, som skal stå til højre og ikke som et symbol, der adskiller to repræsentationer for det samme objekt (Kieran 1981,321).

Problemet er, at når man skal til at løse ligninger, bliver man nødt til at regne på begge sider af lighedstegnet og ikke kun på venstresiden - det vil sige at man bliver nødt til opgive opfattelsen af lighedstegnet som et ”do something-symbol.” Kieran (1981, 323) giver et eksempel på en elevs løsning af en ligning, hvor eleven tilsyneladende har svært ved at give slip på proces-opfattelsen:

$$\begin{aligned} x+3 &= 7 \\ &= 7-3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Kieran kalder denne type fejl for en ”genvejs-fejl”, fordi man kommer frem til det rigtige resultat, men lighedstegnet bruges ikke som et ækvivalens-symbol, snarere som et tegn, der adskiller de enkelte skridt i løsningsprocessen. Tilsvarende genvejs-fejl findes også hos både gymnasieelever og universitetsstuderende, for eksempel i forbindelse med differentation af funktioner (Kieran 1981, 324). Konklusionen er, at selv om mange matematikelever på højere niveauer efterhånden lærer at bruge lighedstegnet som et ækvivalens-symbol, har nogle elever svært ved at slippe af med den proces-opfattelse de har tilegnet sig på et tidligt stadie af deres skolegang.

Proces/objekt-dualiteten kommer også til udtryk når man ser på en forskrift for en funktion. Tall (Tall et al 2001, 5) splejser ordene proces og objekt sammen til ordet ”procept”, som derved symboliserer dualiteten. En elev siges at have en *proceptuel* tankegang, når eleven har reificeret det matematiske begreb (jævnfør afsnit 2.2) og kan behandle det både som proces og objekt. Generelt repræsenterer de matematiske symboler proceptet, lad os se på notationen $f(x)$. Når man har givet en konkret forskrift kan man enten tænke på den som en potentiel proces, det vil sige, at forskriften er noget, som man kan sætte tal ind i, eller man kan se forskriften som en repræsentation for funktionen som helhed. Tall (ibid) viser i overensstemmelse med Sfards teori at de elever, som har problemer med at forstå funktionsbegrebet, har svært ved at se på processen som en helhed.

Tidligere beskrev jeg elevernes opfattelse af lighedstegnet. Nu er turen kommer til det, der står på hver sin side af lighedstegnet, nemlig den algebraiske notation. I en omfattende undersøgelse af cirka 2000 australske skolebørn i alderen 11-15 år konkluderer MacGregor og Stacey (1997, 15) at eleverne ofte baserer deres fortolkning af algebraisk notation på intuition, gætterier, analogier med andre notationssystemer, som de kender, eller på misforståelser af dårligt designede undervisningsmaterialer. Hovedparten af testspørgsmålene bestod af word-problems, hvor oplysninger, der var givet med ord, skulle konverteres til det symbolske register (og eventuelt løses). I alt kunne kun 73% af 307 elever fra 10. klasse svare på følgende spørgsmål: *David er 10 centimeter højere end Con. Con er h centimeter høj, hvordan kan du udtrykke Davids højde?*

Generelt viste undersøgelsen, at en stor del af eleverne ikke havde en konsistent opfattelse af variabelbegrebet, og at idéen om at en variabel repræsenterer et tal ikke er nem at tage til sig for eleverne (ibid p.16). Et eksempel på elevernes gætterier er, at mange elever som en generel procedure satte et tilfældigt tal ind på en variabels plads – åbenbart fordi de ikke kunne forholde sig til begrebet en ubekendt variabel (ibid p. 7). En anden hyppig fejl var, at eleverne simpelt hen behandlede de variable størrelser som forkortelser uden at tage hensyn til om den matematiske syntaks var korrekt, og en tredje hyppig fejl var at lade den samme variabel repræsentere to forskellige størrelser på sammen tid. Et eksempel på den sidste fejltype er at flere elever til ovenstående spørgsmål om Davids højde svarede: $h = h + 10$ (ibid p. 9). Bogstavet *h* bruges åbenbart som en generel betegnelse for højde. MacGregor og Staceys undersøgelser handler ikke om gymnasieelever, men på samme måde som i ovenstående afsnit om misforståelser af lighedstegnet, må man forvente, at en del af eleverne aldrig får bugt med deres misforståelser af variabelbegrebet – selv i gymnasiet.

3.6.2 Elevernes misforståelser af grafer

Mevarech og Kramarsky (1997, 231f) deler elevernes misforståelser af grafer op i fire katagorier:

a) Forveksling af hældning og højde
b) Forveksling af punkt og interval
c) Opfattelse af en graf som et billede eller kort
d) Punktvis læsning af grafer

a) <u>Forveksling af hældning og højde</u>

Denne misforståelser hænger sammen med, at man i mange opgaver skal arbejde med hældningen af grafen (ofte i form af differentialkvotienten) fremfor med funktionsværdien.

b) Forveksling af punkt og interval

Eleverne er vant til, at der er præcis én løsning på matematikopgaver, så i de opgaver, hvor løsningen er et helt interval, angiver mange elever også bare en enkelt løsning.

c) Opfattelse af en graf som et billede eller kort

Janvier (1998, 83ff) beskriver hvordan elever i opgaveløsningssituationer ofte opfatter førsteaksen som en tidsakse og på den måde laver en dynamisk mental simulation af den situation, som opgaven handler om. Det kan i visse simple tilfælde give korrekte løsninger, men det kan også føre til at det matematiske indhold i problemet negliceres, her følger et godt eksempel på en opgave, som Janvier prøvede af på sine elever: *Skitser en graf, hvoraf sammenhængen mellem den samlede flyvetid for hele flyveturen mellem Montreal og Paris samt flyvemaskinens hastighed fremgår*. Mange af forsøgseleverne tegnede her en graf, som først gik op, derefter havde konstant hældning og til sidst gik ned igen, svarende til et billede af en flyvetur.

Med Duvals teori om vision og visualisering (jævnfør afsnit 2.1.1) i baghovedet kan man opstille den hypotese, at denne fejltype hænger sammen med at eleverne forsøger at producere *ikoniske repræsentationer*.

d) Punktvis læsning af grafer

Mevarech og Kramarsky (1997, 232f) henviser til en undersøgelse af Kerslake fra 1981, hvor en gruppe elever blev spurgt hvor mange punkter der er på en linje. Nogle angav hvor mange punkter de rent faktisk havde brugt til at konstruere linjen, andre talte antallet af steder, hvor linjen havde krydset ”koordinat-gitteret.” Mevarech og Kramarsky opstiller den hypotese, at elevernes tendens til at læse grafer punktvist hænger sammen med elevernes problemer med at forstå kontinuiteten af de reelle tal. I den forbindelse vil jeg tilføje, at det stillede spørgsmål faktisk omhandlede *den matematiske graf,* men at elevernes svar var baseret på *den konkrete repræsentation*.

Duval (2002b, 324) skriver, at de fleste elever (udover det ”naive hollistiske billede,” som blev nævnt i afsnit 2.1.1 om visualisering) kun har en lokal forståelse af grafer, der begrænser sig til aflæsning af koordinaterne til enkelte punkter. Dette betyder, at eleverne har svært ved at se de relevante ”visuelle variable,” og de har derfor svært ved at koordinere det grafiske og symbolske register, selv for lineære sammenhænge, og de har generelt vanskeligt ved at benytte definitioner og forklaringer fra andre registre i forbindelse med grafer.

3.6.3 Elevernes misforståelser i forbindelse med tabeller.

Da tabeller tilsyneladende er nemme at forstå og bruge som statiske repræsentationer, og da man sjældent laver operationer på tabeller, er det ikke så mærkeligt, at litteraturen stort set ikke beskæftiger sig med misforståelser af tabeller.

3.7 Elevernes brug af den formelle definition af en funktion.

Overskriften er muligvis misvisende, fordi der der meget der tyder på, at en stor del af de elever, der er introduceret til funktionsbegrebet ved hjælp af en mængdeteoretisk definition, *ikke* bruger den formelle definition, når de skal afgøre om en givet repræsentation er en funktion eller ej. Tall og Bakar (1992, 39f) skriver i artiklen *Students mental prototypes for functions and graphs*, at ideen med at definere et begreb slet ikke passer sammen med, hvad børn kender fra dagligdagen. Her er børnene vant til nogle lidt løse kriterier, der bestemmer katagorier af objekter, og hver gang et nyt objekt dukker op, som ikke passer ind i de eksisterende katagorier, ændrer man lidt på kriterierne - eventuelt ved at lave undtagelser, så konflikten løses. Tall og Bakars eksempel handler om definitionen af en fugl: Den flyver, har vinger, næb og fjer og den lægger æg. Barnet skal på et tidspunkt afgøre om en kylling er en fugl, den opfylder alle kriterierne bortset fra, at den ikke flyver, men man accepterer alligevel, at den er en fugl.

Tall og Bakar (ibid, 40) opstiller den hypotese, at eleverne udvikler såkaldte ”prototype eksempler” på funktioner (for eksempel $y = x^2$ eller $y = 1/x$) og når eleverne skal afgøre om en ny og ukendt repræsentation er en funktion, sammenlignes egenskaberne mere eller mindre ubevidst for den nye repræsentation med egenskaberne for de kendte funktioner og der træffes (igen mere eller mindre ubevidst) en afgørelse. Tall og Bakar understøtter deres hypotese med en undersøgelse af 28 elever på 16-17 år i England, hvor eleverne først skulle give en definition af en funktion og derefter skulle afgøre om givne grafer og forskrifter kunne repræsentere en funktion.

Eleverne havde ifølge Tall og Bakar fornemmelse for en funktion som en proces, men ingen af de 28 elever gav en tilfredsstillende definition. Spørgsmålene, hvor eleverne skulle afgøre om givne grafer eller forskrifter/ligninger var funktioner eller ej blev også givet til 109 førsteårs universitetsstuderende (Tall og Bakar, 42) og svarene var meget interessante. For eksempel mente ca. 2/3 af både skoleeleverne og de universitetsstuderende, at en cirkel både i det grafiske og symbolske register kan repræsentere en funktion. Den samme undersøgelse viste, at 69% af de universitets-studerende mente, at ligningen $y = 4$ ikke kan repræsentere en funktion. Det sidstnævnte resultat forklares med, at eleverne forbinder funktioner med noget, som varierer, så derfor kan en funktion ikke være konstant.

Slavit (1997, 264) er enig med Tall og Bakar i , at eleverne ikke bruger det formelle funktionsbegreb, men Slavits tilgang er mere teoretisk, og der gives en mere udførlig model for hvordan elevernes alternative opfattelser af funktionsbegrebet er bygget op. Slavit tager udgangspunkt i en artikel af Thompson (1994, 22f) hvorfra jeg har udvalgt to centrale citater:

“I believe that the idea of multiple representations, as currently construed, has not been carefully thought out, and the primary construct needing explication is the very idea of representation. Tables, graphs, and expressions might be multiple representations of functions to us, but I have seen no evidence that they are multiple representations of anything to students.”

Og senere på næste side:

“Put another way, the core concept of “function” is not represented by any of what are commonly called the multiple representations of function, but instead our making connections among representational activities produces a subjective sense of invariance.”

Slavit bygger videre på Thompsons idé om, at den enkelte elevs forståelse af funktionsbegrebet er baseret på en ”subjektiv fornemmelse for invarians,” idet han tilføjer, at det er egenskaber for funktioner som periodicitet, symmetri, monotoni, tilstedeværelsen af asymptoter og skæringspunkter osv, der er de invariante fænomener, som danner grundlaget for elevens forståelse af funktionsbegebet (Slavit 1997, 264). Forskellige elever har stiftet bekendtskab med forskellige eksempler og har dermed lagt mærke til forskellige egenskaber, som en funktion kan have. Efterhånden som eleven møder nye eksempler, jo flere egenskaber klassificerer eleven efter, og funktions-opfattelsen bliver derfor mere sofistikeret med tiden. En form for reifikation (jævnfør afsnit 2.2) kan forekomme, når eleven kan benytte alle de mulige egenskaber for funktioner uden at referere til et specifikt eksempel og en funktion bliver et abstrakt objekt, som kan besidde egenskaberne eller ej (ibid 267f).

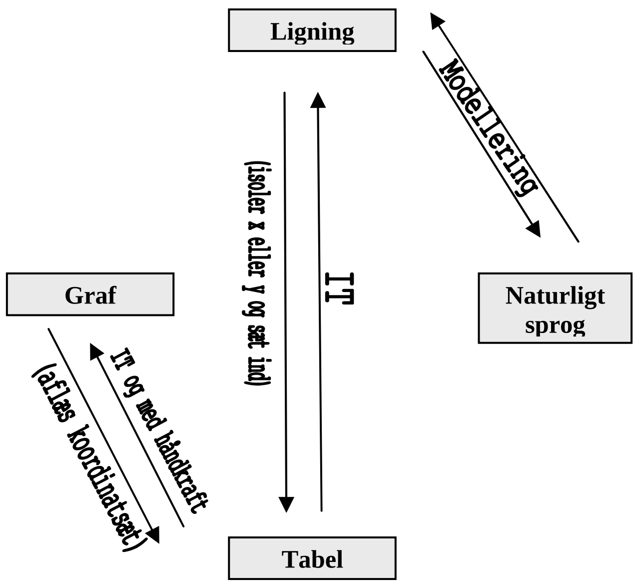
3.8 Tolkning af bekendtgørelsen – en semiotisk analyse

Indtil videre har jeg behandlet funktionsbegrebet uden at gå i detaljer med specifikke familier af funktioner. Før jeg kunne tage beslutninger med hensyn til strukturen af mit konkrete design, blev jeg nødt til at se på hvilke funktioner, forløbet skulle handle om, og se på hvilke kompetancer bekendtgørelsen fokuserer på. I afsnittet om korrespondance- og covarianstilgang har jeg refereret de dele af bekendtgørelsen, der direkte er relevante for funktioner i matematik på C-niveau. Det er bemærkelsesværdigt hvor stor del af disse faglige mål, der specifikt handler om et register eller konversioner mellem to registre. Herunder har jeg oversat de nævnte faglige mål til min terminologi, (bemærk at antallet af punkter er forøget, fordi nogle af punkterne er delt i to):

Faglige mål:

- *Generel brug af det symbolske register*
- *Generel brug af det grafiske register*
- *Konversion fra det numeriske til det grafiske register*
- *Konversioner mellem det symbolske register og naturligt sprog*
- *Brug af IT-hjælpemidler til konversion fra det numeriske til det symbolske register, samt til konversion mellem det numeriske og det grafiske register (Regression)*
- *Modellering*

De første fire punkter kan, hvis man tilføjer de to trivielle konversioner fra graf til tabel og fra ligning til tabel, sammenfattes i Figur 3-4:



Figur 3-4

Ved hjælp af de seks markerede konversioner, kan man skifte mellem alle fire registre. Bemærk dog, at vejen mellem det grafiske og symbolske register går over det numeriske register og at registret naturligt sprog kun er knyttet til det symbolske register. Bemærk desuden at det sidste af ovenstående fem punkter, nemlig modellering også er tæt knyttet til konversionerne mellem naturligt sprog og det symbolske register.

Kernestoffet fra bekendtgørelsen kan med min terminologi skrives:

- *Lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable i det symbolske og grafiske register.*
- *Karakteristiske egenskaber ved lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge*

Bemærk at det numeriske register er udeladt, hvilket understreger hvor nedprioriteret det er i forhold til de andre registre. Med karakteristiske egenskaber i punkt nummer to menes følgende:

I det symbolske register, hvor jeg har tilladt mig at bruge notationen $f(x)$:

- For en lineær sammenhæng $f(x) = ax + b$ gælder
  $f(x + \Delta x) = f(x) + a \cdot \Delta x$, hvor det bemærkes at $a \cdot \Delta x$ er uafhængig af x.
- For en eksponentiel sammenhæng $f(x) = b \cdot a^x$ gælder
  $f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x}$, hvor det bemærkes at $a^{\Delta x}$ er uafhængig af x.
- For en potenssammenhæng $f(x) = b \cdot x^a$ gælder
  $f(h \cdot x) = f(x) \cdot h^a$, hvor det bemærkes at h^a er uafhængig af x.

De karakteristiske egenskaber kan også udtrykkes i registret naturligt sprog:

- For en lineær sammenhæng vil en givet absolut ændring af *x* give en konstant absolut ændring af *y* uafhængigt af den *x*-værdi, der tages udgangspunkt i.
- For en eksponentiel sammenhæng vil en givet absolut ændring af *x* give en konstant relativ ændring af *y* uafhængigt af den *x*-værdi, der tages udgangspunkt i.
- For en potenssammenhæng vil en givet relativ ændring af *x* give en konstant relativ ændring af *y* uafhængigt af den *x*-værdi, der tages udgangspunkt i.

Jeg kan konkludere, at de karakteristiske egenskaber for lineære, eksponentielle og potens-sammenhænge er nemme at udtrykke generelt i det symbolske register og ved hjælp af naturligt sprog, det vil sige de diskursive registre, mens de ikke kan udtrykkes i deres fulde generelitet i det grafiske og numeriske register, det vil sige de ikke-diskursive registre. Absolutte og relative ændringer kan konkluderes at være de vigtigste byggesten for de karakteristiske ændringer af de tre givne typer af sammenhænge.

3.9 Korrespondance-tilgang eller covarians-tilgang?

Efter at det ydre rammer for mit speciale var lagt fast, kom jeg til den første store didaktiske beslutning: *Skulle jeg vælge en korrespondance-tilgang eller en covarians-tilgang?* Selv om det formelle funktionsbegreb ikke er nævnt i bekendtgørelsen længere på C-niveau i gymnasiet, kunne det jo ikke udelukkes, at man med fordel kunne bruge det formelle funktionsbegreb eller eventuelt en endnu mere uformel version af funktionsbegrebet end man traditionelt har brugt i gymnasiet – for eksempel i form af "funktionsmaskinen."

I min redegørelse for misforståelser i forbindelse med funktionsbegrebet gennemgik jeg en række misforståelser, der knytter sig direkte til det symbolske og grafiske register, og det er klart, at disse typer af misforståelser er uafhængige af om man bruger korrespondance- eller covarians-tilgang. Det er også klart at man *kan* udrydde elevernes misforståelser af det formelle funktionsbegreb, hvis man ikke bruger det, men hvilke andre misforståelser vil der dukke frem i stedet og hvilken pris skal man betale?

I afsnittet om elevernes misforståelser af det formelle funktionsbegreb beskrev jeg hvordan mange elever ikke bruger den formelle definition af en funktion, men i stedet opbygger deres egne mere eller mindre konsistente opfattelser funktionsbegrebet baseret på de eksempler på funktioner, som eleverne har haft erfaring med. I betragtning af min klasses lave faglige niveau og abstraktionsniveau, kunne man forvente, at denne type af misforståelse ville blive et stort problem for ca. to tredjedele af klassen, hvis jeg valgte en traditionel korrespondancetilgang. På den anden side set ville de elever, der senere ville vælge matematik på B- eller A-niveau have glæde af en formel introduktion af funktionsbegrebet, som er lettere at bygge videre på, når man for eksempel skal til at lære om sammensatte funktioner eller differentialregning. Desuden giver det formelle funktionsbegreb ikke anledning til uklarheder i undervisningen - fra et matematisk synspunkt. Det er jo (med henvisning til afsnit 3.2 om funtionsbegrebets historiske udvikling) slutproduktet af flere århundreders arbejde med at undgå uklarheder og tvetydigheder. Et valg af en covarians-tilgang vil pludselige fjerne det sikre fundament for undervisningen af funktioner, som man som matematiker altid har lænet sig op af, man vil føle sig sat et par århundreder tilbage i tiden og vil måske ikke kunne give præcise svar på elevernes spørgsmål.

Jeg overvejede dernæst om en korrespondance- eller covarians-tilgang egnede sig bedst til at beskrive de karakteristiske egenskaber, som de tre givne typer af sammenhænge besidder. Som nævnt i analysen af kernestoffet i bekendtgørelsen er absolutte og relative *ændringer* byggestenene for de karakteristiske egenskaber, og da covarians-tilgangen handler om at undersøge, hvad der sker med den ene variabel, når der *ændres* på den anden variabel, er covariation-tilgangen et oplagt valg, når de karakteristiske egenskaber for mine tre typer af funktioner tages i betragtning. Før jeg tog den endelige beslutning, ville jeg undersøge, om der i litteraturen fandtes eksempler på en teoretisk velfunderet covarians-tilgang, som var baseret på absolutte og relative ændringer, eller som på en anden måde havde relation til de tre givne typer af funktioner.

3.10 Covariation: Additive og multiplikative ændringer

Min søgning efter litteratur om en covarians-tilgang til variabelsammenhænge af typen lineære, eksponentielle og potens-sammenhænge, som også gerne skulle behandle absolutte og relative ændringer, gav resultat i form af artiklen ”*Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit*” af Confrey og Smith (1994). I indledningen af artiklen skriver Confrey og Smith (1994, 137), hvor jeg har slettet de talrige parenteser med referencer:

“In this paper, we have chosen the issue of rate of change as an entry to thinking about functions. Recent research has shown that even young children can use rate of change as a way to explore functional understanding. Arguing against the delaying of the introduction of rate of change issues until calculus, where it becomes studied as a 'property' of functions, we have shown that students exhibit strong intuitive understandings of change and can use this understanding to generate functional relationships. This rate-of-change approach is also closely related to a "covariational" understanding of functions which has both historical roots and is closely related to studentproblem-solving actions”

Jeg har tilladt mig at medtage dette forholdsvis lange citat, fordi det giver at godt overblik over Confrey of Smiths covariation-tilgang, men også fordi vendingen ”rate of change” umiddelbart er svær at oversætte til dansk på grund af tvetydigheden af det engelske ord *rate*. Gyldendals engelsk-dansk ordbog fra 1988 giver eksemplerne *rate of speed*, hvor rate er en hastighed, *dropout rate*, hvor rate er en procentsats og *birthrate*, hvor rate er et antal.

Confrey og Smith (1994, 140f) tager udgangspunkt i det numeriske register og opskriver på baggrund af undersøgelser om hvordan elever beskriver ændringer i tabeller tre typer af *rate of change*:

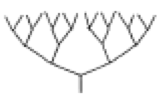
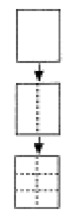
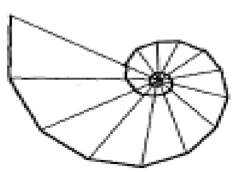
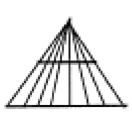
1. Additive rate of change
2. Multiplikative rate of change
3. A proportional new to old rate of change

Den først type vil jeg i det følgende kalde en *additiv ændring*, og den additive ændring fra en tabelværdi til den næste tabelværdi er simpelt hen forskellen på de to tal. Den anden type, som jeg vil kalde for en *multiplikativ ændring*, findes i en tabel ved at udregne forholdet mellem to følgende tabelværdier. Den tredje type udregnes ved at tage forholdet mellem tilvæksten og den gamle tabelværdi, for eksempel fandt Confrey og Smith flere eksempler på studerende som formulerede sig på den måde at fra 9 til 81 er der en ”increase by 8 times” (fordi $(81-9)/9=8$).

I den traditionelle matematikundervisning spiller additive ændringer en større rolle end multiplikative ændringer, for eksempel i differentialregningen, hvilket afspejles i vores notation: Vi bruger Δx om additive ændringer, men har ikke en tilsvarende notation til multiplikative ændringer. Confrey og Smith foreslår, at elevernes intuitive fornemmelse for multiplikative ændringer kan forstærkes ved at bruge notationen ®x for multiplikative ændringer, hvor R står for ratio (Confrey og Smith 1994, 140).

Confrey og Smith (1994, 142ff) genereliserer additive og multiplikative ændringer til også at kunne omfatte ikke-numeriske størrelser ved at indføre begreberne *additive* og *multiplikative enheder*. En enhed er ”den invariante relation mellem en efterfølger og dens forgænger, og enheden skabes som et resultat af en gentagen proces.” Som eksempel på en ikke-numerisk enhed giver Confrey og Smith (1994, 143) et geometrisk mønster, som kan konstrueres ved hjælp af en proces, der minder om fliselægning. Når man ser på mønstret er det ikke umiddelbart klart, hvor store de enkelte fliser er, hvilket illustrerer, at to eller flere enheder kan være ækvivalente.

En fundamental additiv enhed i matematik hænger sammen med processen at tælle (Confrey og Smith 1994, 142). Når et barn for eksempel lærer at tælle, peger barnet på skift på et antal genstande, som typisk er ens i en eller anden forstand, og siger et ord ved hver gentagelse. På den måde skaber barnet ved hjælp af sin pege/snakke-operation en enhed, der svarer til addition af tallet 1. Senere kan barnet lære at bruge andre additive enheder til at tælle med. Eksemplet understreger, at en enhed er en internalisering af en gentagen proces, og ikke en ting, der i sig selv kan adskilles fra processen.

Mangedobling: Den gentagne proces består af at hvert objekt erstattes af et fast antal af identiske kopier af objekter. 	**Opdeling**: Den gentagne proces består af at dele hvert objekt op i et fast antal stykker. 
Similaritet: Et objekt ændres igen og igen og der er en form for proportionalitet mellem to efterfølgende ændringer 	**Procent**: Den gentagne proces er at gange et tal med det samme procenttal.
Forstørrelse: Den gentagne proces er forstørrelse med en givet skalafaktor, hver gang der forstørres, ganges der med den samme skalafaktor. 	**Størrelsesorden:** Brug af eksponentiel notation med 10 som grundtal. Den gentagne proces er at gange med 10.
Sandsynlighed: Et eksperiment med en fast sandsynlighed gentages igen og igen.	**Halveringstid og fordoblingstid:** Den gentagne proces er at vente indtil en vis population er fordoblet eller halveret.

Figur 3-5

Hvor additive processer er tæt knyttede til processen at tælle, hænger multiplikative processer tæt sammen med processen at dele eller mangedoble. Confrey og Smith (1994, 148f) katagoriserer de multiplikative enheder i følgende otte klasser (se Figur 3-5), som er et forsøg på at give en oversigt over de sammenhænge som multiplikative enheder optræder i – både i dagligdagen og i matematikken.

Indtil nu har jeg behandlet begrebet en ændring, som en byggesten i en gentagen proces. Men ændringsbegrebet har flere dimensioner, Confrey og Smith (1994, 158) konkluderer, at koordinationen af følgende tre komponenter af ændringsbegrebet er nødvendig for en solid forståelse af ændringer:

1. Sammenligning af enheder i gentagen proces: En ændring er en byggesten i en gentagen proces
2. Komparativ komponent: Som nævnt i citatet i indledningen har børn en stærk intuitiv fornemmelse for ændringer, for eksempel kan man mærke accelerationer, når en bil sætter hastigheden op, og man kan høre hvor kraftigt vinden blæser.
3. Grafisk komponent: Hvor det første punkt handler om en sekventeret proces, der deles op i passende enheder af eleven, handler den grafiske komponent om en global opfattelse af en graf, hvor hældningen beskriver ændringerne.

3.11 Anvendelse af Confrey og Smiths teori til analyse af det givne kernestof.

Efter at have læst Confrey og Smiths (1994) artikel indså jeg, at additive og multiplikative processer er meget fundementale både i matematikken og i den virkelige verden, og at dette kan forklare hvorfor lineære, eksponentielle, potens- og logaritme funktioner er så nyttige til modellering: Hvis man undersøger sammenhængen mellem to variable, hvor begge variable stammer fra en additiv eller multiplikativ proces i, så bliver resultatet en af de fire nævnte sammenhænge! Jeg har medtaget logaritmefunktioner, fordi de opfylder at en fast multiplikativ ændring af x giver en fast additiv ændring af y og dermed giver en komplet klasse af funktioner, hvilket fremgår af nedenstående skema (Figur3-6). I skemaet skal man forestille sig at man en gentagne gange foretager ændringer af de given typer for x og y, og den tilhørende funktion angives:

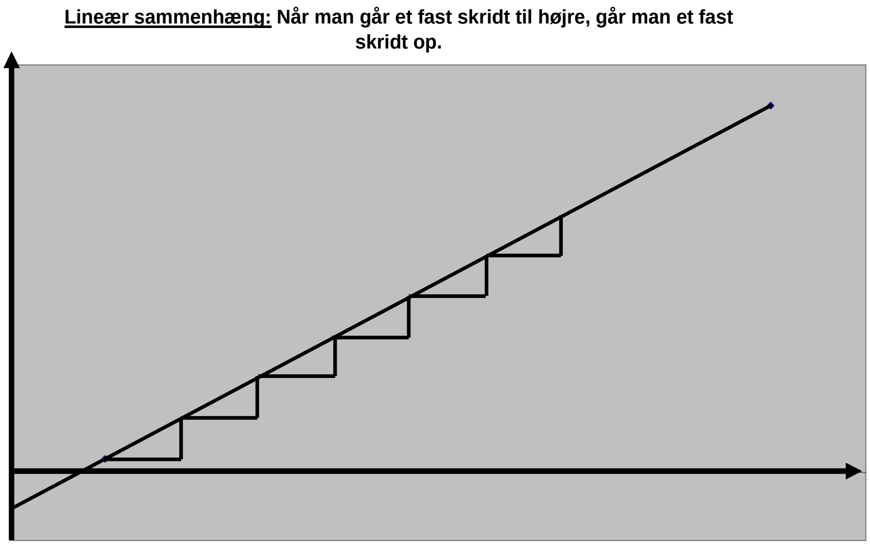
	Additiv ændring af *x*	**Multiplikativ ændring af *x***
Additiv ændring af *y*	*Lineær*	*Logaritme*
Multiplikativ ændring af *y*	*Eksponentiel*	*Potens*

Figur3-6

Bemærk, at skemaet også indeholder information om omvendte funktioner. Ombytning af *x* og *y* overalt i skemaet svarer til ombytning af søjler med rækker, det vil sige, at de lineære funktioner er omvendte funktioner til lineære funktioner, potensfunktioner er omvendte funktioner til potensfunktioner og logaritmefunktioner er omvendte funktioner til eksponentielle funktioner.

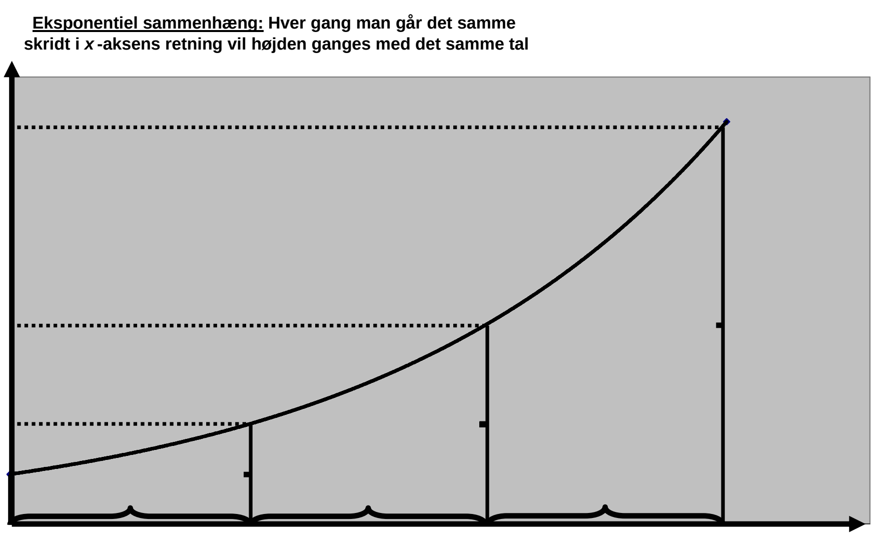
I afsnit 3.8 om analyse af bekendtgørelsen opskrev jeg de karakteristiske egenskaber ved de tre givne typer af funktioner i det symbolske register og ved hjælp af naturligt sprog. Jeg tilføjede, at man ikke kunne repræsentere disse karakteristiske egenskaber i det grafiske og numeriske register uden tab af *generelitet*, men hvis man ser på Confrey og Smiths tre centrale komponenter af ændringsbegrebet (afsnit 3.10), kan man se, at det faktisk er det grafiske og numeriske register, der spiller hovedrollen her. Med andre ord vil de additive og multiplikative i *konkrete tilfælde* komme tydeligst frem i disse to registre. Jeg vil i det følgende undersøge hvordan de additive og multiplikative ændringer kommer til udtryk i det grafiske og numeriske register.

En vigtig pointe er, at absolutte ændringer er nemme at vise på en graf, mens det er sværere at vise relative ændringer. Vi kender alle nedenstående ”trappe”, der illustrerer en lineære sammenhæng (se Figur 3-7):



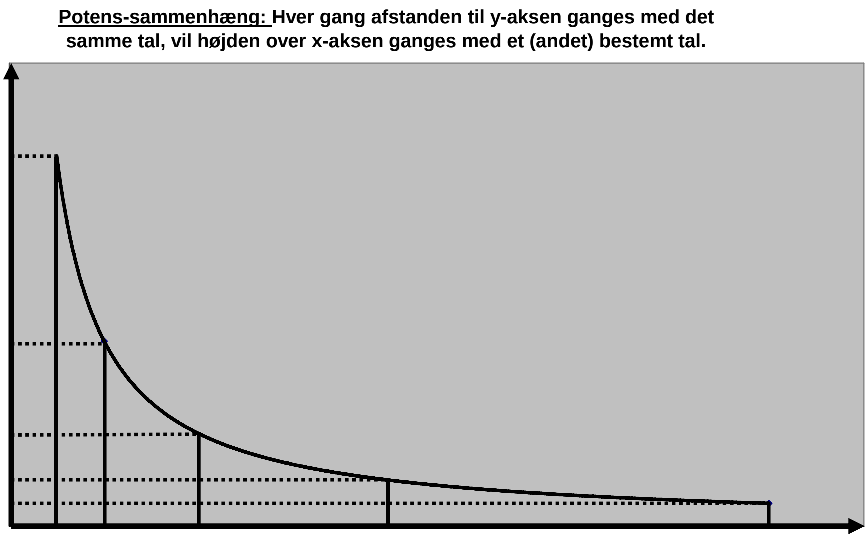
Figur 3-7

Inspireret af grafiske repræsentationer, der skal vise hvad en fordoblingstid er, kom jeg frem til følgende måde at illustrere eksponentielle sammenhænge på (Figur 3-8). Igen er de additive ændringer nemme at markere, mens de multiplikative ændringer (her en fordobling) markeres som en slags opmåling af højden under grafen med en målestok med samme højde som højden under grafen for det foregående punkt. Desuden er der trukket stiplede linjer hen til y-aksen, så man har kan aflæse *y*-værdierne og udregne størrelsen af den multiplikative ændring.



Figur 3-8

For potens-sammenhænge skal man genkende multiplikative ændringer for begge variable, hvilket kan være vanskeligt. Se nedenstående graf (Figur 3-9):



Figur 3-9

Hvordan kommer de karakteristiske egenskaber for lineære, eksponentielle og potens-sammenhænge til udtryk i tabeller? Herunder følger tre konkrete repræsentationer, hvor man af talværdiernes ændring kan slutte sig frem til hvilken type det er (eller rettere sagt en af de typer, det kan være, jævnfør flertydigheden af tabeller afsnit 3.4.3).

Lineær sammenhæng (Når der lægges *2* til *x*, lægges der *6* til *y*)

x	*0*	*2*	*4*	*6*
y	*-5*	*1*	*7*	*13*

Eksponentiel sammenhæng (Når der lægges *4* til *x*, ganges *y* med *10*)

x	*-6*	*-2*	*2*	*6*
y	*0,1*	*1*	*10*	*100*

Potens-sammenhæng (Når *x* ganges med *3*, ganges *y* med *½*)

x	*1*	*3*	*9*	*27*
y	*16*	*8*	*4*	*2*

De to første tabeller kunne sagtens forekomme i den traditionelle matematikundervisning, men da man har en forkærlighed for at bruge faste additive ændringer af *x*-værdierne i tabeller, er den sidste tabel usædvanlig. En vigtig pointe er, at når man konstruerer tabellerne på denne måde ved at bruge den samme addtive eller multiplikative enhed igen og igen, er de tre givne typer af variabelsammenhænge nemme at genkende.

3.12 Valg af covarianstilgang

Jeg beskrev tidligere ulemperne ved at gå væk fra det formelle funktionsbegreb i undervisningen, og nævnte som det største problem, at man som matematiker mister sit faste holdepunkt, hvilket kan føre til uklarheder og usikkerhed i undervisningen. Efter at have analyseret de tre givne typer af sammenhænge ved hjælp af Confrey og Smiths teori om additive og multiplikative ændringer, kunne jeg konkludere, at klassen af lineære, eksponentielle potens- og logaritmefunktioner var en elegant ”afsluttet” klasse af funktioner, hvis egenskaber på simpel vis kunne beskrives ved hjælp af additive og multiplikative ændringer. Denne simpelhed og afsluttethed kunne blive det holdepunkt, som skulle erstatte det formelle funktionsbegreb. Desuden så jeg det – med henblik på den lave abstraktionsgrad i 1.j. og deres problemer med symbolske udregninger - som en fordel, at det grafiske og især det numeriske register kunne komme til at spille en stor rolle i arbejdet med ændringer, og ikke bare som ”display-register” (jævnfør afsnit 3.4.3), der skal vise billeder af det, som man kommer frem til i det symbolske register, men også som et ”aktion-register.”

Alt i alt vurderede jeg, at en covariation-tilgang baseret på additive og multiplikative ændringer vil give et sammenhængende og afrundet forløb under forudsætning af at logaritmer blev inddraget), hvor de karakteristiske egenskaber for de givne typer af funktioner ville komme i forreste række, og hvor der ville være større muligheder for at bruge alle registre aktivt, sammenlignet med en korrespondance-tilgang, som er baseret på det symbolske register, og hvor de karakteristiske egenskaber kommer i anden række i form af egenskaber ved funktioner (jævnfør citatet i introduktionen til afsnit 3.10).

3.13 Problemformulering nummer to

Med en logaritmisk sammenhæng mener jeg i det følgende omvendte funktioner til eksponentielle udviklinger med ligningen $y = b \cdot a^x$.

Formålet med specialet er at designe et undervisningsforløb om lineære, eksponentielle, potens- og logaritmiske sammenhænge på gymnasiets C-niveau, hvor de fire typer af variabelsammenhænge introduceres ved hjælp af en covarians-tilgang baseret på additive og multiplikative ændringer. Der tages udgangspunkt i Duvals teori om semiotiske repræsentationer med fokus på følgende punkter:

- *Analyse af elevernes forudsætninger for brug af det numeriske, grafiske og symbolske register før forløbets start.*
- *Design af opgaver og tilhørende undervisningsmateriale, som tager hensyn til elevernes forudsætninger i de tre registre, som systematisk behandler alle 6 mulige konversioner mellem de tre registre for de tre typer af sammenhænge og som systematisk behandler additive og multiplikative ændringer i de tre registre.*
- *Analyse af elevernes skriftlige arbejde med henblik på at undersøge om eleverne forbedrede eventuelle problemer med de tre registre, om eleverne efter forløbet var i stand til at udføre de konkrete konversioner for de fire givne typer af variabelsammenhænge og undersøge elevernes tilegnelse af covarians-tilgangen.*

3.14 Matematisk afklaring af emnet variabelsammenhænge

I november 2006 skulle jeg undervise 1.j. på Virum Gymnasium i variabelsammenhænge for første gang, som nævnt skulle primært lineære sammenhænge, men også omvendt proportionalitet gennemgås, og det var ikke en del af mit design. Dog kunne jeg ikke komme udenom at fortælle eleverne hvad en variabelsammenhæng er, så dette afsnit indeholder mine overvejelser om, hvordan man skal definere en variabelsammenhæng og slutresultatet deraf.

Klassen brugte i hele grundforløbet undervisningsmaterialet *Matematik C til grundforløbet (Ebbesen 2006)*, hvilket alle 1.G klasser på Virum Gymnasium skulle gøre det første halve år (det sidste halve år kunne lærerne bruge de undervisningsmaterialer, som de ønskede). *Matematik C til grundforløbet (Ebbesen 2006)* starter kapitlet om variabel-sammenhænge med at skrive: ”Fra hverdagen er vi vant til, at der er en simpel sammenhæng mellem talstørrelser,” hvorefter der kommer et eksempel i form af en tabel. Lidt senere identificeres en (variabel)sammenhæng med en ligning: ”...De to størrelser kaldes x og y, og sammenhængen er en ligning, hvoraf man kan beregne y, hvis man kender x (ibid p 36).”

Den sidste bemærkning er interessant, for det første på grund af dens åbenlyst proces-prægede karakter (jævnfør afsnit 2.2). For det andet fordi der ikke står, at y skal være isoleret i ligningen, men at y skal kunne beregnes, hvis x er kendt. Er $y^2 + x^2 = 1$ en variabelsammenhæng? Jeg tolker ovenstående definition sådan, at dette ikke er en variabelsammenhæng, fordi der ikke findes en entydig y-værdi til en givet x-værdi.

Bemærk, at identifikationen af en variabelsammenhæng med en ligning minder meget om funktionsbegrebet i 1700-1800 tallet, og som vi så i det historiske afsnit (3.2) giver det anledning til visse uklarheder.

- Må en variabelsammenhæng være flere flertydig?
- Skal x og y være ligeværdige variable?
- Hvilke regneoperationer må man lave i en ligning/variabelsammenhæng?

Flertydige variabelsammenhænge optræder ikke i matematik på C-niveau, men hvis en elev vælger matematik på et højere niveau og senere skal lære om analytisk geometri, mener jeg, at det ville være naturligt at tænke på analytisk geometri som en del af emnet variabelsammenhænge. Man bruger her tabeller, grafer og ligninger på samme måde som når man arbejder med for eksempel lineære sammenhænge. Derfor besluttede jeg, at jeg ville acceptere flertydige variabelsammenhænge.

Når en variabelsammenhæng identificeres med en ligning, behøver den ene variabel ikke på samme måde som for funktionsbegrebet at have en vigtigere rolle end den anden variabel. Symmetrier af tabeller, grafer og ligninger er tæt forbundet til denne ligeværdighed af de to variable, så for at kunne behandle disse symmetrier, valgte jeg at ligestille x og y-værdien i en variabelsammenhæng.

Med hensyn til at definere hvilke analytiske udtryk, der gælder som variabel-sammenhænge, valgte jeg at gå i Eulers fodspor (jævnfør afsnit 3.2.2) og lave en liste over de regneoperationer, som må indgå i en ligning. I de nedenstående to rammer er slutresultatet af mine overvejelser givet i samme form, som eleverne fik at se:

Hvilken slags ligninger kigger vi på?

Vi begrænser os til at se på ligninger som er fremkommet vha. regneoperationerne plus, minus, gange og dividere samt ved brug af rødder og potenser.

Her er logaritmer ikke nævnt, da eleverne endnu ikke kendte til logaritmer.

Definition af variabelsammenhæng med to variable (kort: variabelsammenhæng)

En *variabelsammenhæng med to variable* er en ligning, hvor der indgår præcis to variable (som her kaldes x og y).

Fra et semiotisk synspunkt er gennemgangen af lineære sammenhænge i *Matematik C – til grundforløbet (Ebbesen 2006)* meget systematisk. Tabeller, grafer og ligninger introduceres, hvorefter alle mulige konversioner mellem de tre registre gennemgås, se nedenstående tabel (Figur 3-10).

Fra → Til ↓	**Graf**	**Forskrift**	**Tabel**
Graf	-	*Kendskab til a og b´s betydning gør, at man kan tegne rette linjer*	*Når mindst to punkter kendes, kan man tegne en ret linje*
Forskrift	*b kan aflæses på grafen, mens a beregnes ved at aflæse to punkter*	-	*Ud fra to punkter kan a beregnes og derefter kan b beregnes vha. et punkt og a*
Tabel	*Aflæsning på graf af punkter*	*x-koordinaten indsættes i forskriften og y beregnes*	-

Figur 3-10

4 Den diagnostiske test

4.1 Formålet med den diagnostiske test og opgavevalg.

Nystartede gymnasieelever har i folkeskolen gjort en lang række erfaringer om tabeller, grafer og ligninger. Udover at have beskæftiget sig med nogle konkrete variabelsammenhænge (primært lineære sammenhænge) i disse tre registre, må man forvente, at eleverne også har tilegnet sig generel viden om de tre registre og forbindelsen mellem dem. Da både de faglige mål og kernestoffet for mit forløb (som beskrevet i min analyse af bekendtgørelsen fra 2004 i afsnit 3.8) havde en stærk tilknytning til brug af de enkelte registre og konversioner mellem registrene, og da jeg havde i sinde at bruge systematisk variation af konversioner som en rød tråd gennem forløbet, ønskede jeg at teste elevernes forudsætninger med hensyn til at udføre konversioner mellem det numeriske, grafiske og symbolske register. Jeg ønskede at undersøge følgende spørgsmål: *Hvilke af de 6 mulige konversioner mellem tabel, graf og ligning har eleverne generelt problemer med?* Jeg opstillede følgende liste over krav til testen:

- *Der skulle indgå både kendte og ukendte typer af variabelsammenhænge i testen,* men det skulle være muligt for eleverne at besvare alle spørgsmål – uden at have specifikke forhåndskundskaber om de typer af variabelsammenhænge, der skulle indgå. På denne måde ville jeg både få information om elevernes viden om for eksempel lineære sammenhænge, og jeg ville få et indblik i elevernes generelle brug af de tre registre.
- *Der skulle indgå både entydige og flertydige variabelsammenhænge.* De flertydige variabelsammenhænge er specielt nyttige til at undersøge om eleverne forstår at punkterne på en graf er præcis de punkter i planen, hvis koordinatsæt passer ind i den tilhørende ligning. Dette skyldes, at eleverne med stor sikkerhed ikke har arbejdet med flertydige variabelsammenhænge før.
- *Der skulle indgå ligninger, hvor y ikke var isoleret.* Meningen var at undersøge, om eleverne havde tilegnet sig nogle generelle kompetancer, der var uafhængige af varibelnavne.
- *Der skulle være fælder baseret på skalering af grafer.*

Jeg besluttede mig for, at eleverne i 1.j. før forløbet om lineære sammenhænge i efteråret 2006 skulle løse en multiple-choice test, hvor der til hver af de seks mulige konversioner mellem de tre registre ville være 10 spørgsmål. En ulempe ved en multiple-choice test kunne være, at opgaverne kommer til at handle om koordination mellem registre fremfor egentlig konversion, da man kan bruge udelukkelsesmetoden i alle opgaverne. Men for det første kan man, hvis man vælger et tilstrækkeligt højt antal svarmuligheder i hvert af spørgsmålene, gøre det svært at svare rigtigt på ret mange af spørgsmålene uden at have en generel idé om hvordan man går fra det ene register til et andet - jeg valgte, at der til hvert spørgsmål skulle være fire svarmuligheder. For det andet var det også af interesse for mig at undersøge hvordan eleverne kunne koordinere hvert par af registre, det var ikke kun konversionerne, der var vigtige. For det tredje havde multiple-choice-formatet den praktiske fordel, at resultaterne er nemme at tælle op. Her er de seks typer af spørgsmål:

1. Graf til ligning: Givet en graf og et antal ligninger, skal man finde den ligning der hører til grafen.
2. Graf til tabel: Givet et antal x-værdier, skal de tilsvarende y-værdier aflæses på grafen.
3. Ligning til tabel: Givet en ligning, og et antal x-værdier skal man finde de tilsvarende y-værdier.
4. Tabel til ligning: Givet en tabel, skal man vælge den af de givne ligninger, hvori alle tabellens punkter passer ind.
5. Ligning til graf: Givet en ligning skal man finde den af de givne grafer, der hører til ligningen.
6. Tabel til graf: Givet koordinaterne for et antal punkter, skal man vælge den af de givne grafer, hvorpå alle punkterne ligger.

Følgende typer af variabelsammenhænge valgte jeg at tage med i testen: Lineære sammenhænge, potens-sammenhænge, polynomier, udtryk hvor kvadratrødder indgår og forskellige flertydige udtryk. Jeg valgte at eksponentielle sammenhænge ikke skulle indgå, idet jeg vurderede, at meget få af eleverne ville være i stand til at forstå hvordan man bruger en formel, hvor x står i eksponenten. Potens-sammenhænge, kvadratrods-sammenhænge og polynomier er nemmere at gå til og alle elever havde arbejdet med kvadratrødder og potenser før (dog muligvis ikke i ligninger).

Øvrige krav til testen:

- *De forkerte svarmuligheder skulle så vidt som muligt være plausible* og skulle prøve at fange eleverne i at begå systematiske misforståelser.
- De tilladte hjælpemidler var skriveredskaber og en lineal, som skulle bruges til aflæsning på grafer.
- Opgaverne med de kendte typer af sammenhænge skulle komme før opgaver med ukendte sammenhænge, sådan at eleverne ikke skulle gå i stå allerede i starten.
- Varigheden var 100 minutter.
- Der skulle gives en karakter for testen.

4.2 Eksempler på konstruktion af opgaver til testen

I det følgende vil jeg vise seks eksempler på opgaver (en for hver type af konversion), som viser hvordan jeg konstruerede den diagnostiske test. Overalt vil jeg med klammerne ”[ ]” henvise til det sidetal i Appendiks, hvor opgaverne befinder sig. Se først på opgave 3.1[10] om konversion fra graf til ligning:

Når man ser på en graf for en lineær sammenhæng er der to ting, som man ikke kan undgå at lægge mærke til: Eventuel skæring med akserne og stejlheden af linjen. Da eleverne i folkeskolen har lært at koefficienterne i linjens ligning har noget med disse to visuelle variable at gøre, er det oplagt at søge efter systematiske fejltagelser her. Den forkerte svarmulighed a) har jeg valgt at have med, fordi jeg ville undersøge om eleverne ville være i stand til at tage hensyn til, at de to akser er skaleret forskelligt. Umiddelbart ser det ud til, at linjens hældning er -1, da vinklen til akserne er 45 grader, men faktisk er den -2. Her vil jeg minde om Duvals skelnen mellem vision og visualisering (jævnfør afsnit 2.1.1), i det øjeblik man ser en graf, bruges vision til at få nogle umiddelbare indtryk, men for at forstå det matematiske indhold, skal man bruge visualisering, hvor alle detaljerne i det grafiske register tages til efterretning.

Svarmulighed b) og c) har jeg taget med, fordi de fejlagtigt identificerer linjens ligning med skæringspunktet med henholdsvis *x*- og *y*-aksen. Jeg har endda fristet eleverne til at vælge denne mulighed ved at placere *x*´et og *y*´et på akserne lige ud for skæringspunkterne.

En typisk opgave om konversion fra graf til tabel er opgave 9.2. I denne opgavetype er der langt færre muligheder for at lave fælder, da der er tale om en kongruent konversion (jævnfør afsnit 2.1.4). Til hver af de tre givne *x*-værdier skal man simpelt hen aflæse den tilhørende *y*-værdi. Jeg medtog denne opgavetype i testen for at undersøge om alle elever havde styr på de helt elementære færdigheder.

En af de opgaver om konversion fra ligning til tabel, hvor *y* ikke var isoleret i ligningen, er opgave 4.3[15]. Ligningen $x = -y$ valgte jeg, fordi det er en af de simpleste ligninger med to variable, jeg kan komme i tanke om, hvor *x* er isoleret. Formålet med opgaven var at undersøge, om eleverne kunne løse simple opgaver med ligninger, hvor y ikke var isoleret. Som forkerte svarmuligheder valgte jeg forskellige hele multipla af 2, som rent visuelt ser plausible ud, fordi de givne x-værdier også er hele multipla af 2.

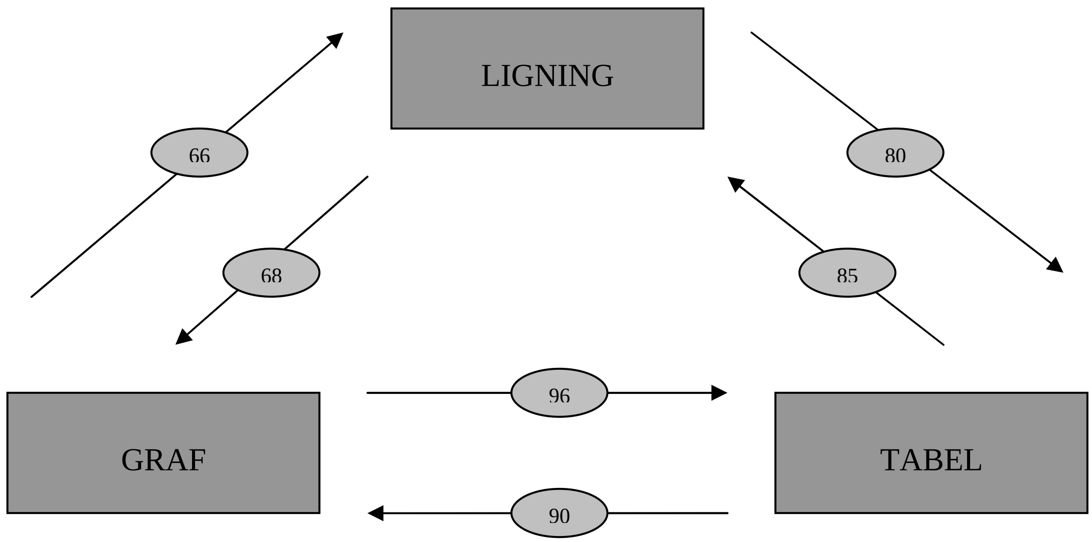
Opgave 3.4[11] er et eksempel på en konversion fra tabel til ligning. Den forkerte svarmulighed a) er taget med fordi den er fremkommet ved at bytte rundt på *x* og *y* i den korrekte løsning. Den forkerte svarmulighed b) er taget med fordi ligningen passer med det første talpar i tabellen, men ikke med de andre. Den forkerte svarmulighed c) er et forsøg på forkert, men meningsfuld brug af det symbolske register: *y* er det samme som *x* med et nul bagved.

Opgave 1.5[4] om konversion fra ligning til graf minder lidt om opgave 3.1, idet de forkerte svarmuligheder hænger sammen med linjernes skæringspunkter med akserne. Jeg har valgt tre forkerte grafer, som alle har et skæringspunkt med værdien *2*, hvilket måske sættes i forbindelse med 2-tallet i ligningen. Den korrekte graf er den eneste, hvor tallet *2* ikke fremstår tydeligt rent visuelt, akserne skæres i Origo og ved første blik ser det ikke ud til at hældningen er *2*, da *y*-aksen ikke er skaleret på samme måde som *x*-aksen.

Til slut vil jeg behandle opgave 6.6[25], et eksempel på en opgave om konversion fra tabel til graf. Af hensyn til den begrænsede tid der var til rådighed for eleverne under testen valgte jeg, at der i denne type af opgave skulle være en tabel med to talpar og at opgaven gik ud på at finde den graf, der indeholdt begge punkter. Mulighederne for at lave systematiske fejl er begrænsede, jeg valgte i denne opgave at angive nogle grafer, hvor tallet 4 kommer frem enten som skæringspunkt eller hældningskoefficient.

4.3 Overordnede resultater af diagnostisk test

Den diagnostiske test blev taget af 22 elever i 1.j. i november 2006 og det samlede resultat kan aflæses på Figur 4-1, hvor succes-raten for de enkelte konversioner er angivet (i procent):



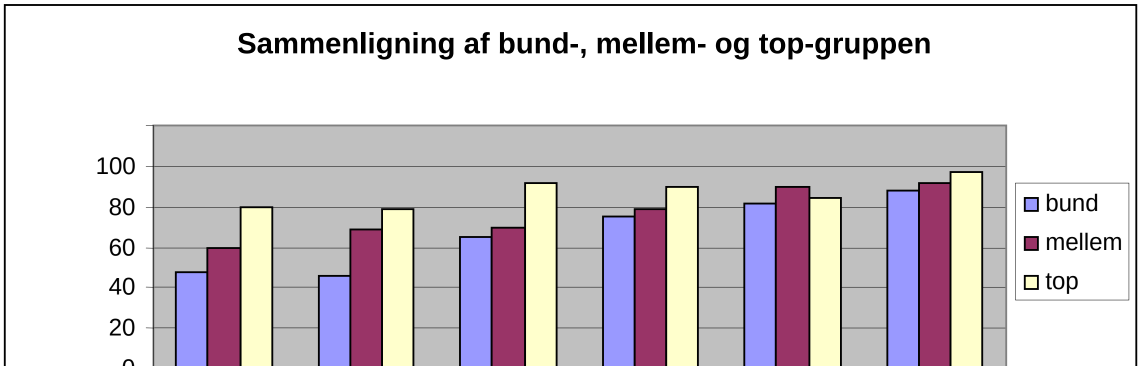
Figur 4-1

Fra resultaterne kan følgende konklusioner drages:

- Givet to registre ser det generelt ikke ud til, at det har været meget sværere at konvertere den ene vej i forhold til den anden vej.
- Konversionerne mellem graf og ligning var de vanskeligste, derefter kommer konversionerne mellem ligning og tabel, og de nemmeste konversioner var mellem graf og tabel.

At konversionernes sværhedsgrad er uafhængig af retningen, vil jeg forklare med, at der ikke var tale om rene konversioner. Som nævnt betyder tilstedeværelsen af de fire svarmuligheder, at opgaverne til en vis grad handler om koordination. Det kan ikke overraske, at der var færrest fejl i opgaverne med de kongruente konversioner mellem graf og tabel, og det overrasker heller ikke, at der var flest fejl i opgaverne med de ikke-kongruente konversioner mellem graf og ligning. Dog kan det overraske at succesraten i den sidstnævnte opgavetype var *så* lav som det var tilfældet. Da succesraten i konversionen fra graf til tabel var 96% og succesraten i konversionen fra tabel til ligning var 85% kunne man under antagelse af, at eleverne gik via tabellen, når graf og ligning skulle koordineres, forvente en succesrate i konversionen fra graf til ligning på omkring $96\% \cdot 85\% \approx 82\%$. Resultatet var kun 66%, hvilket jeg tager som en indikation af, at mange af eleverne *ikke* brugte tabellen til mellemstation – i det mindste i nogle af opgaverne – og er blevet vildledt af nogle af de irrelevante visuelle variable (jævnfør afsnit 3.6.2).

For at undersøge om de elever, som samlet havde mange fejl, havde særlige problemer med en eller flere af de seks typer af konversioner, inddelte jeg de 22 elever i tre grupper efter deres samlede præstationer i testen. I Figur 4-2 kan man man se hvordan bund-, mellem- og top-gruppen klarede de seks typer af konversioner.



	Graf-lign	Lign-graf	Lign-tabel	Tabel-lign	Tabel-graf	Graf-tabel
bund	48%	46%	65%	75%	81%	88%
mellem	60%	69%	70%	79%	90%	91%
top	80%	79%	91%	90%	84%	97%

Figur 4-2

Figuren viser, at der for konversionerne mellem tabel og graf ikke er den store forskel på de tre gruppers præstationer. For konversionerne mellem ligning og tabel skiller topgruppen sig tilsyneladende ud fra de andre to grupper, og for konversiorne mellem graf og ligning er der en klar forskel på alle tre grupper. Den generelle tendens er, at jo svagere gruppen er, jo større spredning er der på gruppens præstationerne i de tre par af konvertioner.

4.4 Udvalgte opgaver fra den diagnostiske test og fejltyper.

Jeg har udvalgt de 15 opgaver, som gav den laveste procent-score, i nedenstående skema (Figur 4-3) kan man se opgavernes fordeling efter type af konversion.

Nummer på type	**.1**	**.2**	**.3**	**.4**	**.5**	**.6**	**I alt**
Type	Graf-Ligning	Graf-Tabel	Ligning-Tabel	Tabel-Ligning	Ligning-Graf	Tabel-Graf	
Antal	5	0	2	3	5	0	15
Numre	2, 3, 8, 9, 10		4, 6	1, 6, 9	1, 5, 8 9,10		

Figur 4-3

Først skal det bemærkes, at der blandt de 15 opgaver med den laveste succesrate ikke var de to typer om konversion mellem graf og tabel. Herefter skal det bemærkes, at der blandt de 15 udvalgte opgaver var en overvægt af typen med konversion mellem graf og ligning.

Jeg analyserede besvarelserne af de 15 opgaver i og kom frem til følgende inddeling af fejltyper, hvor de medvirkende registre er angivet i parentes. Fejltyperne er ikke 100 procent disjunkte, idet flere af faktorerne kan være på spil i den samme opgave.

1. *(Graf og ligning)* *Koefficientens grafiske fortolkning misforstås.*
2. *(Graf og ligning)* *Aksernes forskellige skalering overses.*
3. *(Graf og ligning)* *Mangel på kritisk sans, når der indgår ukendte grafer og ligninger.*
4. *(Ligning)* *Problem med ligninger, hvor y ikke er isoleret.*

5. *(Tabel)* *Problemer med simple udregninger med tal.*

1. Koefficientens grafiske fortolkning misforstås (opgaverne 1.5[4], 2.1[6] og 3.1[10]).
   De tre opgaver har det tilfælles, at de alle handler om lineære sammenhænge, hvor jeg har udvalgt de forkerte svarmuligheder på en sådan måde, at koordinaterne til skæringspunkterne med akserne optræder på forskellig vis i ligningerne. I opgave 1.5 (50% rigtige) indgår der et *2*-tal i ligningen, og et *2*-tal optræder som skæringspunkt i alle de tre forkerte svarmuligheder, men ikke i den rigtige svarmulighed. I opgave 2.1 (59% rigtige) skæres begge akserne i værdien *2*, og jeg har udvalgt de forkerte svarmuligheder sådan, at tallet 2 indgår i alle ligningerne. I opgave 3.1 (18% rigtige) er to af de forkerte svarmuligheder valgt på en måde, så skæringspunkterne med akserne identificeres med løsningen, og hele 9 elever har valgt disse to løsninger (den tredje forkerte svarmulighed hører til under en anden fejltype). Besvarelserne af disse tre opgaver viser, at tæt på halvdelen af eleverne har problemer med simple lineære sammenhænge og lader sig vildlede af irrelevante visuelle variable.

2. Aksernes forskellige skalering overses (opgave 3.1[10])
   I opgave 3.1 (18% rigtige) er *x*-aksen og *y*-aksen ikke skaleret på samme måde, hvilket betyder, at hældningen ikke er *-1*, som man først skulle tro, da linjens vinkel med akserne ser ud til at være 45 grader, men derimod *-2*. Derfor har hele 8 elever valgt svarmulighed a) i stedet for den korrekte svarmulighed d). Det er muligt, at nogle af disse *8* elever ikke har set på hvilke tal, der står på akserne, men har talt ”takkerne” på akserne i stedet, når man går en ”tak” ud går man jo en ”tak” ned.

3. Mangel på kritisk sans, når der indgår ukendte grafer og ligninger (opgaverne 8.1[30], 8.5[32], 9.1[34], 9.5[36], 10.1[38], 10.5[40]).
   Der er en tendens til, at svarene i de opgaver, hvor der indgår grafer og ligninger, som er ukendte fra folkeskolen, er mere jævnt fordelt over svarmulighederne end ellers. Dette tyder på, at mange af eleverne på baggrund af nogle irrelevante visuelle parametre vælger den graf eller ligning, der har et eller andet til fælles med den givne graf eller ligning, i stedet for at prøve at sætte forskellige tal ind i ligningerne og

ræsonere sig frem til et resultat. Et godt eksempel er opgave 8.1[30] (36% rigtige): 8 elever valgte a), 8 elever valgte b), 0 elever valgte c) og 6 elever valgte d). Ingen elever valgte altså ligningen $y = 2x$, som er en velkendt ret linje, mens alle tre ”ukendte” ligninger blev valgt, bemærk at ligningen $2y = x$ ikke blev sorteret fra som en lineær sammenhæng på samme måde som $y = 2x$. Når grafen er usædvanlig, ved mange af eleverne ikke hvad de skal gøre og vælger derfor de mest usædvanlige ligninger.

4. <u>Problem med ligninger, hvor *y* ikke er isoleret (opgave 1.4[3], 4.3[15], 6.4[23]).</u> Eleverne havde store problemer med de opgaver, hvor der indgik ligninger, hvor det var *x* og ikke *y*, der var isoleret. I opgave 4.3 (36% rigtige) skulle en tabel udfyldes ved hjælp af ligningen $x = -y$. Under prøven rakte en elev hånden op og sagde, at der var en fejl i opgaven, hvilket siger en del om elevernes syn på denne ligning! Eleverne er åbenbart så vant til, at *y* er isoleret på forhånd, at det for de flestes vedkommende ikke falder dem ind at isolere *y* selv eller i det hele taget at fortolke ligningen. Til sammenligning lykkedes for 82% af eleverne at udfylde en tabel ved hjælp af ligningen $y = x - 1$ i opgave 1.3 og alle kunne udfylde en tabel ved hjælp af ligningen $y = x + 1$ i opgave 2.3. Mine resultater tyder på at de fleste af eleverne har en proces-opfattelse af ligninger, jævnfør afsnit 3.6.1: En ligning er en opskrift på hvordan man kommer fra *x* til *y*. Denne opfattelse er også kun blevet styrket af definitionen af en variabelsammenhæng, som eleverne (som nævnt i afsnit 3.14) blev udsat for i grundforløbet: ”*... og sammenhængen er en ligning, hvoraf man kan beregne y, hvis man kender x ”(Matematik C – til grundforløbet, Ebbesen 2006, 36).* Med en objekt-opfattelse vil man derimod læse ligningen fra opgave 4.3 på følgende måde: ”*x* og *y* har modsat fortegn”, og det er meget nemt at løse opgaven, men sådan læser to tredjedele af eleverne åbenbart ikke ligningen.
I Opgave 1.4 (50%) svarede 10 elever b) og 11 elever det korrekte c), dette resultat kan også fortolkes ved hjælp af proces/objekt-tankegangen. Næsten halvdelen af eleverne kigger ikke så meget på hvad der er *x* og hvad der er *y*. De ser mere på, at den øverste række i tabellen er input og den nederste række er output, venstresiden af

ligningen er output og højresiden er input. Med en procestankegang kan man læse svarmulighederne som følger:

a) gør ingenting
b) træk én fra
c) læg én til
d) træk tallet fra én

Jeg påstår ikke, at en objekt-tankegang er nødvendig for at løse denne opgave. Hvis man bare betragter den nederste række i tabellen som input og øverste række som output, kan ovenstående proces-tankegang nemt give den korrekte løsning.

5. <u>Problemer med simple udregninger med tal (opgave 6.3[23], 9.4[35])</u>
   Man må ikke glemme den simple forklaring på elevernes fejl, at mange af eleverne har problemer med regning med tal. For eksempel kunne kun 41% af eleverne løse opgave 6.3, hvor en tabel skulle udfyldes ved hjælp af ligningen $y = x(x+1)$.

Ovenstående fejltyper er som nævnt baseret på en analyse af de 15 opgaver, hvor der var flest fejl. Er der ikke nogle opgaver, som eleverne klarede bedre end forventet?

Eleverne var overraskende gode til at konvertere fra tabel til ligning i tilfælde, hvor *y* var isoleret i ligningen. For eksempel valgte 86% af eleverne korrekt ligningen $y = x^2 + 4$ i opgave 7.4[27], 95% af eleverne valgte korrekt ligningen $y = x^3$ i opgave 8.4[31], mens 91% af eleverne korrekt valgte ligningen $y = (x+2)^2$ i opgave 10.4[39]. Selv om de fleste af eleverne næppe har arbejdet med denne type af ligninger før, kunne de altså sagtens sætte givne tal ind i dem og komme frem til det rigtige resultat.

Nogle af opgaverne om grafer og ligninger gik forbavsende godt. For eksempel svarede 82% af eleverne rigtigt i opgave 7.5[28], hvor grafen hørende til ligningen $y = x(x+1)$ skulle findes blandt fire næsten identisk udseende grafer. Da de færreste af eleverne har lært om rødder til andengradspolynomier, har eleverne efter alt at dømme sat et par tal ind i ligningen og har på denne måde kommet frem til det rigtige svar. Tilsvarende kunne 82% af eleverne i opgave 6.5[24] udpege grafen for kvadratrodsfunktionen.

Til slut skal det nævnes, at opgave 8.3[31] (82% rigtige) og 9.3[35] (86% rigtige) gik forbavsende godt selv om de begge handler om konversioner fra ligning til tabel, hvor x er isoleret i ligningen. I den sidstnævnte opgaven hedder ligningen endda $x = y^3$, som eleverne næppe har arbjedet med før. Alt i alt er det svært at blive klog på elevernes behandling af ligninger, hvor x er isoleret. Der er åbenbart specifikke karakteristika ved de enkelte opgaver, der har betydning for om størstedelen af eleverne kan løse opgaven eller ej.

4.5 Tre elevprofiler fra den diagnostiske test.

Jeg har i det foregående afsnit gjort rede for at elevernes fejl kan deles op i fem fejltyper. Et interessant spørgsmål er nu, i hvor høj grad den enkelte elev begår den samme type af fejl gentagne gange?

På baggrund af den diagnostiske test har jeg for hver af eleverne lavet en elevprofil, hvor man kan se hvor mange rigtige svar eleven havde i hver af de seks opgavetyper. Jeg har udvalgt tre elever, en fra bundgruppen (elev U), en fra mellemgruppen (elev D) og en fra topgruppen (elev O), og i det følgende viser jeg deres profiler og diskuterer typerne og konsistensen af deres fejl.

4.5.1 Elev U (fra bundgruppen)

Nr.	Type	# rigtige ud af 10
.1	Graf-Lign.	4
.5	Lign.-Graf	4
.3	Lgn.-Tabel	7
.4	Tabel-Lign	8
.6	Tabel-Graf	9
.2	Graf-Tabel	9
	Sum	41

Som man kan se til højre havde elev U store problemer med de opgaver, hvor det grafiske og symbolske register skulle koordineres. I hendes besvarelse er der ingen krydser eller streger, der indikerer, at hun har aflæst andre koordinater end skæringspunkter med akserne i denne type opgaver. Det er derfor sandsynligt, at hun primært har baseret valget af svar på en falsk forbindelse mellem koefficienterne i ligningen og koordinaterne til skæringspunkterne med akserne. Hvis man sammenligner de opgaver, hvor den samme graf eller ligning indgår, kan man finde eksempler på inkonsistens i elev U´s svar. For eksempel vælger hun korrekt ligningen $y = 1$ til til grafen i opgave 4.1[14], men valgte en skrå linje gennem *(0,1)* til den samme ligning på den foregående side i opgave 3.5[12]. I opgave 1.5[4] vælger hun korrekt grafen til ligningen $y = 2x$, men givet en anden graf, som skærer begge akser i værdien *2* to opgaver senere (i opgave 2.1) vælger hun den samme ligning $y = 2x$. I opgave 9.5[36] vælger hun også grafen hørende til ligningen $y = 2x$, men denne gang er den givne ligning $x^2 = y^2$. Derudover vælger elev U i opgaverne 8.1[30], 9.1[34] og 10.1[38] lineære ligninger til grafer, som ikke er rette linjer, i alle tre tilfælde er skæringspunktet med *y*-aksen for de givne grafer identisk med *b* (konstanten) i det valgte svar. Alt i alt lader elev U sig vildlede af irrelevante visuelle variable og viser, ikke at hun er i stand til at udelukke svarmuligheder ved at aflæse koordinatsæt på grafer, som ikke passer ind i ligningen.

De to eneste fejl i opgaverne om konversion fra tabel til ligning er i de eneste to spørgsmål, hvor *x* er isoleret i ligningerne, nemlig i opgave 1.4[3] og 6.4[23]: I opgave 1.4 valgte hun ligningen $x = y - 1$ til en tabel, hvor *y*-værdierne, som stod for neden, var én mindre end *x*-værdierne. I opgave 6.4 valgte hun ligningen $x = y^2$ til en tabel, hvor y-værdierne, som stod for neden, var lig med kvadratet af *x*-værdierne. I begge disse opgaver har elev U altså fundet den rigtige proces, henholdsvis ”at trække en fra” og ”at kvadrere," men har ikke taget hensyn til, at det var den forkerte variabel, der var isoleret. Derfor kan man sige, at elev U har fundet den rigtige proces i samtlige 10 opgaver af denne type.

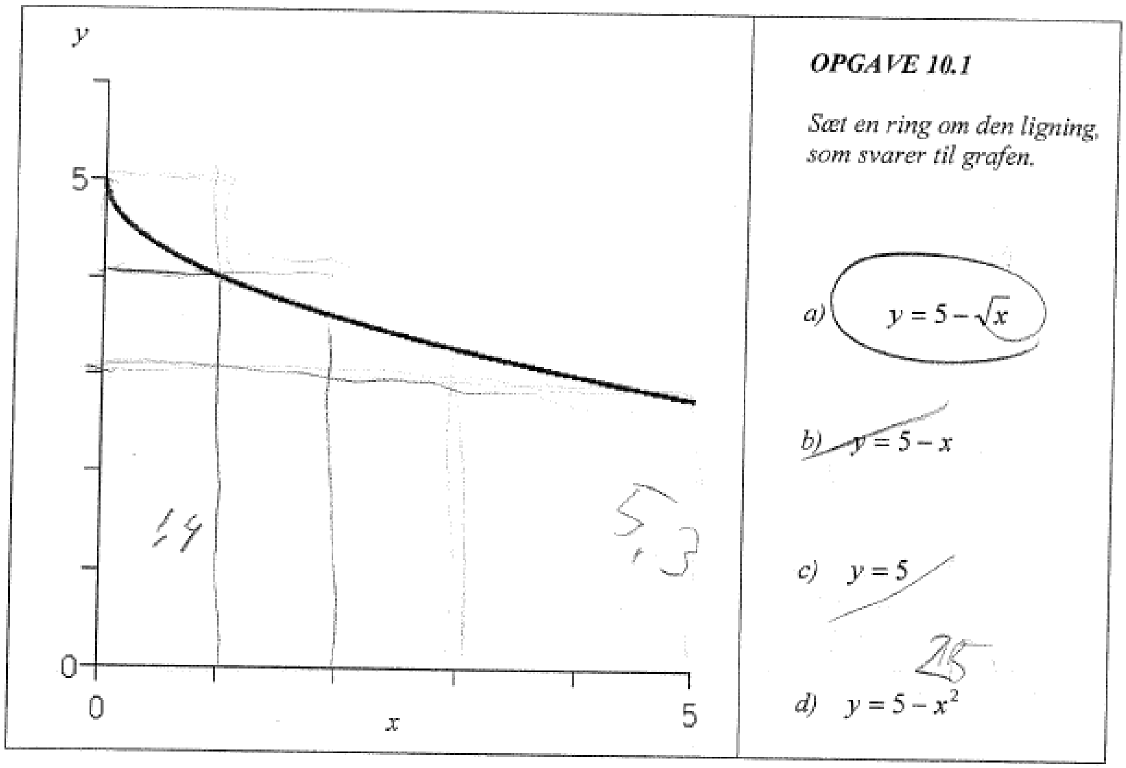
To af de tre fejl i opgaver om konversion fra ligning til tabel er i de opgaver, hvor *x* er isoleret i ligningen. For eksempel kunne elev U ikke udfylde en tabel ved hjælp af ligningen $x = -y$, hun brugte konsekvent ligningen $y = x$ i stedet. Konklusionen er, at hun ikke har problemer med at koordinere ligninger og tabeller – så længe *y* er isoleret i ligningen. Hun har heller ingen problemer med opgaverne om konversion fra graf til tabel eller fra tabel til graf, som man kan se i ovenstående tabel.

Når man tænker på, at elev U ikke havde problemer med at aflæse koordinater på grafer (9 af 10 rigtige) eller med at finde ligninger til tabeller (8 af 10 rigtige) kan det undre, at hun i opgaverne om konversion fra graf til tabel (4 af 10 rigtige) ikke bare lavede en tabel til hver graf og fandt den rigtige ligning derefter. Hun sad inde med den nødvendige viden, men formåede ikke at mobilisere den på det rigtige tidspunkt.

4.5.2 Elev D (fra mellemgruppen)

Elev D´s besvarelse af opgaverne om koordination mellem graf og ligning adskiller sig fra elev U´s besvarelse ved, at der overalt er tydelig streger, der markerer aflæsning af koordinatsæt, se for eksempel besvarelsen af opgave 10.1 herunder (Figur 4-4):

Nr.	*Type*	*# rigtige ud af 10*
.1	*Graf-Lign.*	5
.5	*Lign.-Graf*	8
.3	*Lgn.-Tabel*	8
.4	*Tabel-Lign*	10
.6	*Tabel-Graf*	10
.2	*Graf-Tabel*	10
	Sum	51



Figur 4-4

Elev D aflæser koordinaterne til et par punkter på grafen eller graferne og prøver om de passer ind i ligningen eller ligningerne. Grunden til at der kun er 5 ud af 10 rigtige i konversionerne fra graf til ligning er først og fremmest, at hun i tre af opgaverne har valgte en ligning, der passer med et enkelt punkt på grafen, men ikke med alle punkter. Den ene af de to andre fejl i denne opgavetype er at hun i opgave 2.1[6] byttede rundt på ligningerne $y = 2 - x$ og $y = x - 2$, og den noget grovere fejl i opgave 3.1[10], hvor ligningen $x = 3/2$ blev valgt til en skrå linje, der skar x-aksen i punktet $(0{,}3/2)$.

4.5.3 Elev O (fra topgruppen)

Nr.	Type	# rigtige ud af 10
.1	Graf-Lign.	9
.5	Lign.-Graf	8
.3	Lgn.-Tabel	10
.4	Tabel-Lign	10
.6	Tabel-Graf	8
.2	Graf-Tabel	10
	Sum	55

Eleven fra topgruppen adskiller sig fra de to andre udvalgte elever ved at hun ikke laver simple regnefejl, og hun har besvaret alle spørgsmål om konversioner mellem ligning og tabel perfekt. Hendes 5 fejl er følgende: Hun falder i skaleringsfælden i opgave 3.1[10], hun kan ikke finde graferne, der hører til de usædvanlige ligninger $y^2 = 1$ og $y^2 = x^2$ i opgave 9.5[36] samt 10.5[40], og hun laver to sjuskefejl i konversionerne fra tabel til graf. Eleven O har ikke lavet fejl i de opgaver, hvor *x* er isoleret. Jeg kan konkludere, at elev O kun har mistet overblikket i de opgaver, hvor der indgik flertydige variabelsammenhænge, ellers har hun været i stand til at ræsonere sig frem til det rigtige svar og har ikke ladet sig påvirke af de indbyggede fælder. Da hun ikke kan have stødt på alle de medvirkende typer af variabelsammenhænge i folkeskolen, antager jeg, at hun udover en forståelse for den grafiske tolkning af koefficienterne i linjens ligning har prøvet sig frem i størstedelen af opgaverne ved at indsætte tal i ligningerne og koordinere dette med grafer eller tabeller.

4.6 Konklusion af den diagnostiske test

Det vigtigste jeg fik ud af den diagnostiske test var, at jeg fik en overordnet idé om klassens brug af tabeller, grafer og ligninger: En stor del af eleverne lod sig påvirke af de indbyggede fælder og viste usikkerhed samt mangel på kritisk sans i en del af opgaverne.

Alle eleverne kunne dog foretage en punktvis koordination af grafer og tabeller. Langt de fleste elever havde også forholdsvis nemt ved at koordinere tabeller og ligninger – kun en enkelt elev havde under halvdelen rigtige her. De fleste elever kunne altså godt sætte talsæt ind i ligninger og undersøge om ligningerne var opfyldt eller ej. Derfor kan det overraske, at så mange elever havde problemer med at koordinere grafer og ligninger.

I konversionen fra graf til ligning kan man jo bare lave en tabel ud fra grafen, og så finde den rigtige af de fire ligninger på samme måde som i opgaverne om konversion fra tabel til ligning. Jeg kan konstatere, at en stor del af eleverne ikke har grebet konversionerne fra graf til ligning an på denne måde, men enten har hæftet sig ved nogle irrelevante visuelle parametre. På samme måde kan man i opgaverne om konversion fra ligning til graf udvælge nogle x-værdier, der er i definitionsmængden for alle graferne, lave en tabel og undersøge om tabellerne hører til ligningerne. Dette har en stor del af eleverne heller ikke gjort. Den store mængde af oplysninger, der er tilstede i en graf sammenlignet med en tabel har altså forvirret eleverne - valgfriheden til at aflæse koordinaterne til et arbitrært punkt på en graf giver anledning til forvirring. Eller måske regner disse elever bare med, at der altid er en nem regel for hvordan man konverterer mellem graf og ligning? Min pointe illustreres af opgaverne 7.1[26] og 8.4[31], hvor det rigtige svar i begge tilfælde er ligningen $y = x^3$ og tre af de fire svarmuligheder er identiske. Hele 95% kan gå fra tabel til ligning i dette tilfælde, mens kun 64% kan gå fra graf til ligning.

Elevernes problemer med at koordinere grafer og ligninger samt problemer med at se de relevante visuelle variable er i overensstemmelse med Duvals (2002b, 324) resultater, som jeg nævnte i afsnit 3.6.2.

Elevernes fejltagelser i opgaverne med ligninger, hvor y ikke var isoleret, viser i overensstemmelse med teorien om elevernes opfattelse af lighedstegnet (se afsnit 3.6.1), at en del af eleverne ikke opfatter ligninger på samme måde som lærerne og ikke nødvendigvis opfatter lighedstegnet som et ækvivalenssymbol. Jeg fandt flere eksempler på en procesopfattelse af ligninger, hvor venstresiden af ligningen er output, mens højresiden er input. Mange af eleverne mangler således grundlæggende forudsætninger i det symbolske register. Endelig viste den diagnostiske test, at en del af eleverne laver mange regnefejl i simple udregninger med tal.

5 Design af undervisningsforløbet

5.1 Det matematiske indhold af forløbet

Da jeg i december 2006 skulle begynde på det egentlige design af undervisningsforløbet startede jeg med at lave en liste over det matematiske indhold. Det lå på forhånd fast, at det overordnede emne var potens-sammenhænge, eksponentielle sammenhænge, repetition af lineære sammenhænge samt til en vis grad logaritmiske sammenhænge, og for at få en idé om hvilket indhold, der lægges vægt på i matematik på C-niveau efter gymnasiereformen, læste jeg afsnittet om variabelsammenhænge i elevernes lærebog *Gyldens Gymnasiematematik Grundbog C* (Clausen et al 2005).

For både eksponentielle sammenhænge og potens-sammenhænge gennemgås følgende:

- Monotoniforhold
- Asymptoter
- Formel for bestemmelse af *a* af *b* ved hjælp af to punkter
- Regression
- Karakteristiske egenskaber

Derudover bliver følgende emner taget op for eksponentielle sammenhænge

- Formel for fordoblings- og halveringstid
- Logaritmer som knap på lommeregneren

Det skal bemærkes, at logaritmer i *Gyldens Gymnasiematematik Grundbog C* indføres som en ”nyttig knap på lommeregneren,” som er nødvendig at bruge i formlerne for fordoblingstid og halveringstid og i formlen for bestemmelse af *a* af *b* ved hjælp af to punkter for en potens-sammenhæng. Logaritmiske sammenhænge behandles altså ikke på lige fod med de to andre typer af sammenhænge.

Jeg besluttede, at jeg som minimum ville forsøge at inddrage ovenstående indhold i mit forløb sådan at de elever i min klasse, som senere ville vælge matematik på et højere niveau, ville have sammenlignelige forudsætninger med eleverne fra de andre klasser. I afsnit 5.4 om den tilsigtede viden vil jeg uddybe det matematiske indhold.

5.2 Indledende afgrænsninger

I dette afsnit vil jeg beskrive de indledende valg jeg traf, da forløbet skulle afgrænses og min angrebsvinkel skulle fastlægges. Min første store beslutning var som nævnt, at jeg ville bruge en covarianstilgang baseret på additive og multiplikative ændringer. Her er en oversigt over de fem næste store beslutninger:

- Det indsamlede datamateriale skulle udelukkende være skriftligt
- Udgangspunktet skulle tages i det numeriske register
- Jeg ville selv lave undervisningsmateriale og opgavesamling
- Modellering og naturligt sprog skulle ikke inddrages direkte
- Logaritmiske sammenhænge skulle behandles i detaljer

5.2.1 Skriftligt datamateriale

Da jeg var alene om mit speciale, og da jeg selv skulle stå for undervisningen af mit designede forløb, var det som nævnt i afsnit 2.3 af praktiske årsager naturligt at basere dataindsamlingen på skriftligt materiale. Jeg besluttede fra starten, at datamaterialet skulle udgøres af to skriftlige afleveringer, en eller flere små tests undervejs i forløbet og en afsluttende to-timers prøve, hvor der skulle gives karakter. Da det ikke var mit mål at beskæftige mig med, hvad der foregik i klasseværelset i de enkelte timer, fravalgte jeg at supplere det skriftlige materiale med lydoptagelser fra timerne.

5.2.2 Udgangspunkt i det numeriske register

Med min semiotiske tilgang var det af afgørende betydning for forløbet hvilket register, jeg ville vælge at introducere de nye typer af variabelsammenhænge i. Traditionelt bruges det symbolske register, men tre vigtige faktorer talte for at bruge det numeriske register: For det første er den valgte covarians-tilgang primært baseret på det numeriske register (Confrey og Smith 1994, 135), for det andet var det min erfaring som klassens lærer, at de svageste elever havde store problemer med at bruge det symbolske register, og for det tredje viste den diagnostiske test, at mange af eleverne var overraskende gode til at bruge det numeriske register - jævnfør afsnit 4.5 om elevprofiler fra den diagnostiske test, hvor eleven U fra bundgruppen, som er en af dem, der normalt har problemer med det symbolske register, viste sig at klare konversionerne fra tabel til ligning næsten perfekt. Min hypotese var på grundlag af den diagnostiske test, at mange af eleverne faktisk var gode til at finde systemer i tabeller, selvom de havde problemer med at udføre operationer i det symbolske register. Ved at tage udgangspunkt i det numeriske register var det mit håb, at jeg kunne få flere af klassens elever til at deltage aktivt i forløbets første del, end hvis jeg tog udgangspunkt i det symbolske register.

Et modargument til denne fremgangsmåde kunne være: Eleverne skal alligevel arbejde med eksponentielle sammenhænge og potens-sammenhænge i det symbolske register på et senere tidspunkt, er den nævnte fremgangsmåde ikke bare at udsætte pinen? Hertil kunne jeg svare, at man ganske rigtigt skal bruge det symbolske register før eller siden, men da en stor del af det matematiske indhold, nemlig monotoniforhold, asymptoter, fordoblings- og halveringstid samt de karakteristiske egenskaber kan behandles meningsfuldt udelukkende i det numeriske og grafiske register, vil en stor del af indholdet gøres mere tilgængeligt for eleverne ved at udsætte brugen af det symbolske register. Der vil selvfølgelig blive brugt mindre tid på det symbolske register end i den traditionelle undervisning, men er det ikke lige så vigtigt, at eleverne ved hvad en fordoblings/halveringstid er, kan argumentere for at lige netop eksponentielle sammenhænge har fordoblings/halverings-tider og kan finde fordoblings/halveringstider i det numeriske og grafiske register, som det er at kunne beregne fordoblings/halveringstider ved hjælp af en formel?

5.2.3 Undervisningsmateriale og opgavesamling

Da der mig bekendt ikke var andre i Danmark, som havde lavet undervisningsmateriale om eksponentielle, potens- og logaritmiske sammenhænge baseret på en covarianstilgang med additive og multiplikative ændringer, hvor udgangspunktet var i det numeriske register, besluttede jeg, at mit design skulle resultere i fremstillingen af en opgavesamling og tilhørende undervisningsmateriale.

5.2.4 Modellering og naturligt sprog inddrages ikke direkte

Jeg tog den beslutning, at jeg ville fokusere på det numeriske, grafiske og symbolske register, og dermed ikke direkte ville inddrage det naturlige sprog og modellering. Det betød ikke, at eleverne i 1.j. skulle snydes for disse meget centrale aspekter, men det betød bare, at forløbet ville blive to-delt: Første del ville omhandle tabeller, grafer og ligninger, mens anden del ville omhandle naturligt sprog og modellering. Dette speciale handler udelukkende om den første del, jeg vil dog nævne, at jeg valgte undervisningsmaterialet "Vækst" af Pedersen (2005) til modelleringsdelen, fordi opgaverne i dette hæfte bærer præg af en covarianstilgang, hvor der lægges vægt på de karakteristiske egenskaber for lineære, eksponentielle og potens-sammenhænge, og der således bygges videre på mit designede forløb.

En væsentlig ulempe ved at udskyde modelleringsaspektet er, at eleverne kan have svært ved at se hvad variabelsammenhængene skal bruges til i starten af forløbet. I princippet er der ikke noget i vejen for, at modelleringsaspektet tages op allerede i starten af forløbet i sammenhæng med additive og multiplikative ændringer i det numeriske og grafiske register. Man kunne på et tidligt tidspunkt behandle forskellige additive og multiplikative ændringer i den virkelige verden som for eksempel mangedobling, opdeling, similaritet og så videre, og man kunne søge at styrke elevernes "komparative komponent" af ændringsbegrebet for at få eleverne til at arbejde med alle dimensioner af ændringsbegrebet (jævnfør afsnit 3.10).

Min begrundelse for at udskyde modelleringsaspektet er for det første, at arbejdsbyrden ved at designe opgaver og undervisningsmateriale var så stor, at jeg blev nødt til at begrænse mig. Desuden ønskede jeg på baggrund af gymnasiereformen, at en vigtig del af dette speciale skulle være at komme med et matematisk stringent og afrundet forløb som alternativ til den traditionelle behandling af de 4 typer af funktioner.

5.2.5 Logaritmiske sammenhænge

Når man tager udgangspunkt i additive og multiplikative ændringer i det numeriske register er logaritmiske sammenhænge lige så naturlige at indføre som eksponentielle sammenhænge. Det ses let, at de to nævnte typer er omvendte sammenhænge, og derfor volder grafer for logaritmiske sammenhænge heller ikke større problemer end grafer for eksponentielle sammenhænge. Da logaritmer under alle omstændigheder skulle behandles (om ikke andet som en knap på lommeregneren, se afsnit 5.1), og da jeg ønskede et matematisk afrundet forløb, besluttede jeg fra starten, at logaritmiske sammenhænge skulle inddrages på lige fod med de andre typer af sammenhænge.

5.3 Problemformulering nummer tre

Formålet med specialet er at designe et undervisningsforløb om lineære, eksponentielle, potens- og logaritmiske sammenhænge på gymnasiets C-niveau, hvor de tre typer af variabelsammenhænge introduceres ved hjælp af en covarians-tilgang baseret på additive og multiplikative ændringer. Der tages udgangspunkt i Duvals teori om semiotiske repræsentationer med fokus på følgende punkter:

- *Analyse af elevernes forudsætninger for brug af det numeriske, grafiske og symbolske register før forløbets start.*
- *Design af opgaver og tilhørende undervisningsmateriale, som tager hensyn til elevernes forudsætninger i de tre registre ved at tage udgangspunkt i det numeriske register og udskyde brugen af de symbolske register, som systematisk behandler alle 6 mulige konversioner mellem de tre registre for de tre typer af sammenhænge og som systematisk behandler additive og multiplikative ændringer i de tre registre.*
- *Analyse af elevernes skriftlige arbejde med henblik på at undersøge om eleverne forbedrede eventuelle problemer med de tre registre, om eleverne efter forløbet var i stand til at udføre de konkrete konversioner for de fire givne typer af variabelsammenhænge og på at undersøge elevernes tilegnelse af covarians-tilgangen.*

5.4 Tilsigtet viden.

I dette afsnit gives en oversigt over den tilsigtede viden i forløbet, i det næste afsnit argumenterer jeg for de valg, jeg har truffet.

1. Symmetri

x og y er ligeværdige variable, hvilket ses på forskellig vis i de tre registre.

- Grafiske register: *x*-aksen kan være den lodrette akse.
- Numeriske register: *x*-værdierne kan være nederst (eller sidst) i tabeller.
- Symbolske register: *x* kan være isoleret i en ligning.

2. Operationer, som bevarer det matematiske objekt

Følgende operationer ændrer ikke på det matematiske objekt, kun repræsentationen.

- Numeriske register: Ombytning af rækkefølgen af talparene i en tabel.
- Grafiske register: Skalering af akserne, ombytning af akserne.
- Symbolske register: Omskrivning af ligning (ækvivalens).

3. Covariation: Additive og multiplikative ændringer

Når man ændrer på den ene variabel, så ændres den anden variabel.

- Udførelse og genkendelse af multiplikative og additive ændringer i tabeller.
- Genkendelse af alle fire typer af variabelsammenhænge i alle tre registre.

4. Konversioner

Udførelse af de 6 mulige konversioner mellem det numeriske, grafiske og symbolske register for de fire typer, herunder hører regression samt formlerne, hvor to punkter bruges til at bestemme koefficienterne i ligningen for alle 4 typer af sammenhænge.

5. Monotoniforhold: Koordination af ændringer i de tre registre.

Definition af aftagende og voksende sammenhænge, koordination af ændringer i de tre registre:

- Numeriske register: Additive og multiplikative ændringer som gentagen proces.

- Grafiske register: Grafens hældning samt additive og multiplikative ændringer.
- Symbolske register: Koefficienten a.

6. Fordoblingstid og halveringstid

Fordoblingstid og halveringstid i alle tre registre.

- Numeriske register: Vurdering af størrelsesorden af fordoblings/halverings-tid.
- Grafiske register: Aflæsning af fordoblings/halverings-tid.
- Symbolske register: Formler til beregning af fordoblings/halverings-tid.

7. Omvendte sammenhænge

Det følger af de karakteristiske egenskaber for de fire typer af sammenhænge, at:

- Den omvendte sammenhæng til en lineær sammenhæng er også lineær.
- Den omvendte sammenhæng til en potens-sammenhæng er også potens.
- Den omvendte sammenhæng til en eksponentiel sammenhæng er logaritmisk.

5.5 Begrundelse for den tilsigtede viden.

Et grundlæggende kendskab til de enkelte registre en forudsætning for at man kan tilegne sig matematisk forståelse. Den diagnostiske test viste, at en del af eleverne havde en ufuldstændig opfattelse af de tre registre, hvilket de to første punkter af min tilsigtede viden havde til formål at rette op på.

I den diagnostiske test kom det frem, at mange af eleverne i visse tilfælde havde svært ved at arbejde med ligninger, hvor x var isoleret. Dette førte mig til det første punkt i den tilsigtede viden om symmetri: Eleverne er åbenbart fra folkeskolen så vant til at y er den afhængige variabel, at de ikke nødvendigvis ser det som en selvfølge at valget af variabelnavne er arbitrært.

Elevernes problemer med ligninger, hvor x er isoleret, førte også til punkt nummer to i den tilsigtede viden. Elevernes manglende vilje til at omskrive ligningerne og isolere y i den diagnostiske test fik mig til at overveje, om størstedelen af eleverne overhovedet har tænkt over, at ækvivalente ligninger repræsenterer den samme variabelsammenhæng? I afsnit 3.6.1 om elevernes opfattelse af ligninger skrev jeg, at mange elever ikke opfatter lighedstegnet som et ækvivalenssymbol. Hvis dette er tilfældet, hvordan skal disse elever så kunne forstå, at ækvivalente ligninger giver samme variabelsammenhæng? Generelt handler punkt to i den tilsigtede viden om, at visse operationer i de tre registre ikke ændrer ved det matematiske objekt, men bare ved repræsentationen (jævnfør afsnit 3.4.2). Her nævntes også skalering af akser som en sådan operation, da dette også gav problemer i den diagnostiske test valgte jeg også at tage skalering op.

Det tredje punkt i den tilsigtede viden omhandler covariation-tilgangen baseret på teorien om additive og multiplikative ændringer af Confrey og Smith (jævnfør afsnit 3.10), og jeg har tidligere argumenteret for hvorfor jeg valgte at tage udgangspunkt i det numeriske register.

De første tre punkter har således til formål at forstærke elevernes forståelse af de tre registre og indføre et nyt værktøj i det numeriske register, som forfremmer det numerisker register til at være et ”action” register. Det fjerde punkt er på baggrund af Duvals teori det centrale punkt: En nødvendig forudsætning for at opnå matematisk forståelse er at kunne foretage konversioner mellem de forskellige registre (jævnfør afsnit 2.1.4).

Ifølge Duval er koordination af mindst to registre en nødvendig betingelse for matematisk forståelse (jævnfør afsnit 2.1.4). Med min covariation-tilgang er koordinationen af ændringer i de tre registre helt central, og på denne måde kan monotoniforhold behandles, hvilket er punkt nummer fem. Bemærk, at man med et passende valg af standardligning for de fire typer af variabelsammenhænge kan lade koefficienten a bestemme hvordan variabelsammenhængen ændrer sig, mens b bestemmer et skæringspunkt med en af akserne eller bare et fast punkt. Ændringer i det numeriske register beskrives selvfølgelig ved hjælp af additive og multiplikative ændringer, mens ændringerne i det grafiske register både kan beskrives punktvist og globalt: Med en punktvis beskrivelse af ændringer mener jeg, at man ved at udvælge diskrete punkter kan arbejde med additive og multiplikative ændringer for *x* og *y* i det grafiske register, og med globale ændringer mener jeg grafens overordnede form, om den går opad eller nedad.

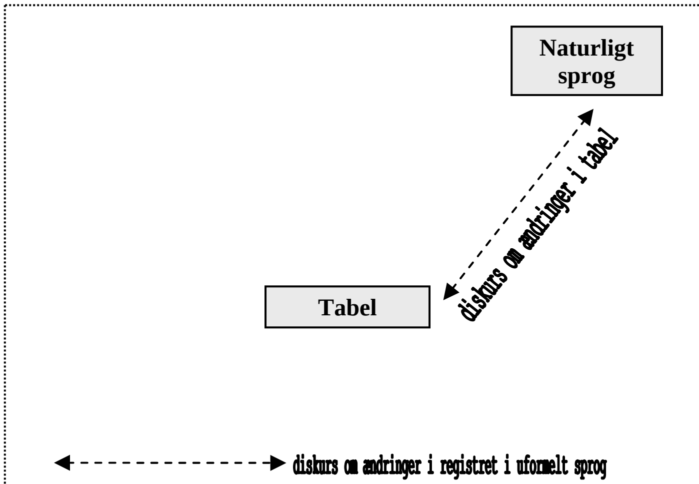
Med den valgte covariation-tilgang er det nemt at indføre fordoblings- og halveringstider: En fordoblingstid (henholdsvis halveringstid) er den gentagne additive ændring af *x*, der giver en multiplikative ændring af *y* på *2* (henholdsvis ½).

Det sidste punkt om omvendte sammenhænge valgte jeg at tage med, fordi det sammen med punktet om symmetri i de tre registre på en simpel måde tydeliggør, at den valgte klasse af variabelsammenhænge har nogle pæne egenskaber, og det understreger, at eksponentielle sammenhænge og logaritmiske sammenhænge opfører sig ”modsat.” Med omvendt sammenhæng mener jeg her omvendt funktion, men vil definere omvendte sammenhænge ved hjælp af ombytning af *x* og *y*-værdier i tabeller, og vil ikke komme ind på generelle betingelse for eksistens af omvendt sammenhæng eller lignende.

5.6 Rækkefølge af gennemgang baseret på de semiotiske registre.

I den traditionelle matematikundervisning vælger man at gennemgå en type af funktion ad gangen, først i det symbolske register, derefter i det numeriske og til sidst i det grafiske register. Da jeg allerede havde besluttet at tage udgangspunkt i det numeriske register og vente med at bruge det symbolske register, stod det klart, at jeg skulle vælge en anden fremgangsmåde. Skulle jeg holde fast i at gennemgå en enkelt type af variabelsammenhæng ad gangen og bare ændre rækkefølgen af registrene, eller skulle jeg tage alle fire typer af variabelsammenhænge på én gang, men gradvist inddrage flere registre?

Da jeg gerne ville tage udgangspunkt i det numeriske register og vente så længe som muligt med det symbolske register, faldt det naturligt at vælge mulighed nummer to. Sammenlignet med den traditionelle undervisning, hvor det ville være mærkeligt at starte med at opskrive forskrifterne $y = ax + b$, $y = b \cdot a^x$, $y = b \cdot x^a$ og $y = a \cdot \log(x) + b$, giver det god mening at starte med at definere additive og multiplikative ændringer i det numeriske register og derefter definere samtlige variabelsammenhænge, der opfører sig regulært med hensyn til gentagne additive eller multiplikative ændringer. Nedenstående Figur 5-1 viser, at udgangspunktet tages i tabeller:



Figur 5-1

Jeg besluttede, at tage udgangspunkt i tabeller med særligt pæne tal, som var konstrueret ved gentagne additive eller multiplikative ændringer af *x* og *y* (fremover kaldet en *regelmæssig* tabel), og at indføre en notation, sådan at disse ændringer blev angivet i tabellen. På denne måde forfremmes en tabel fra at være et endeligt sæt punkter til at være et potentielt uendeligt sæt punkter. Her er et eksempel:

x	*0*	*1*	*2*	*plus 1*
y	*1*	*3*	*5*	*plus 2*

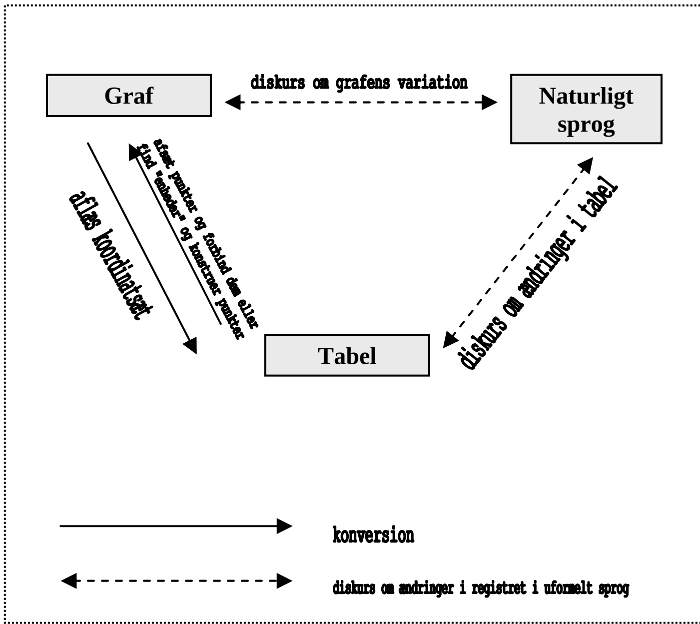
Den gentagne proces repræsenteres af den sidste søjle, som jeg vælger at kalde ”systemet” i tabellen, og man kan se at der er tale om en lineær sammenhæng. Jeg besluttede at definere de fire typer af sammenhænge ved hjælp af sådanne ”systemer”. I den forrige figur har jeg udover det numeriske register inddraget registret naturligt sprog, fordi det er diskursen om tabeller, der så at sige ”giver tabellen liv” og udtrykker den potentielt uendelige proces af gentagne additive eller multiplikative ændringer.

Med den valgte fremgangsmåde starter man i det register, der indeholder mindst information (jævnfør afsnit 3.4.3). Man kan sige, at tabellerne på grund af deres diskrete natur er et skelet, hvor kødet kommer på senere i form af grafer og ligninger. Det problem, at eleverne kan komme til at identificere det matematiske objekt med de først benyttede repræsentationer (jævnfør afsnit 2.1) kan derfor føre til et meget ufuldstændigt billede af de benyttede variabelsammenhæng: Eleverne tror, at "skelettet" er hele dyret. Hvordan skal eleverne få et indtryk af, at der mellem tabellens udvalgt værdier findes et kontinuum af tal?

For det første kender eleverne allerede til lineære sammenhænge, hvor tegningen af den rette linje mellem punkterne symboliserer denne udfyldelse af tomrummet mellem tabellens værdier. Ved at drage analogier og sige, at man på samme måder ønsker at forbinde punkter i tabellerne for eksponentielle, potens- og logaritmiske sammenhænge, får eleverne en idé om, at tabellerne ikke viser hele det matematiske objekt.

For det andet kan man ved at arbejde med interpolation i tabeller give eleverne idé om, at tabellerne kan ikke bare kan udvides ved gentagne gange at anvende de givne additive og multiplikative ændringer, hvilket giver nye punkter *uden for* det interval, hvor tabellens eksisterende punkter ligger i, men man kan også altid finde nye punkter *mellem* to givne punkter i en tabel. Denne potentielle uendelighed af interpolationsprocessen giver fornemmelsen af at der findes et kontinuum mellem to givne punkter i en tabel. Når man skal konvertere fra tabel til graf, bliver teknikkerne med at udvide en tabel helt centrale. Graferne for de tre nye typer er jo ikke bare rette linjer, så for at kunne tegne en præcis blød kurve er det som regel nødvendigt først at udvide tabellen.

Det næste register der inddrages er altså det grafiske, se nedenstående Figur 5-2:

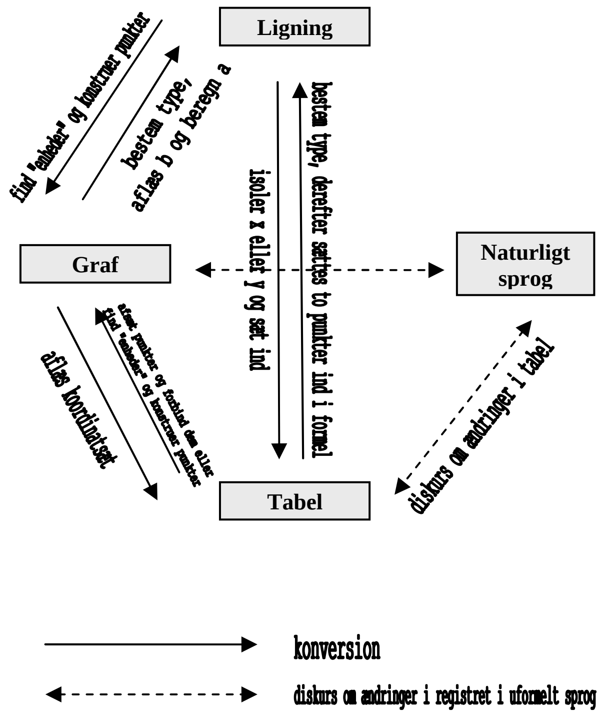


Figur 5-2

De ellers trivielle konversioner mellem graf og tabel sættes i et lidt andet lys, når man stiller det krav, at man kun arbejder med tabeller med gentagne additive eller multiplikative ændringer.

- Tabel til graf: I stedet for at et antal tilfældige punkter afsættes på en graf og forbindes med en blød kurve, konstrueres grafen ved at gentagne gange bruge samme additive eller multiplikative ændring for x og y eller ved interpolation. Konstruktionsprocessen består af at konvertere ændringer fra det numeriske til det grafiske register.
- Graf til tabel: Punkterne skal udvælges nøje, hvis tabellen skal bestå af gentagne additive eller multiplikative ændringer, og hvis man ikke kender typen af sammenhæng ved man ikke om man skal bruge additive eller multiplikative ændringer.

Til sidst inddrages det symbolske register, se Figur 5-3:

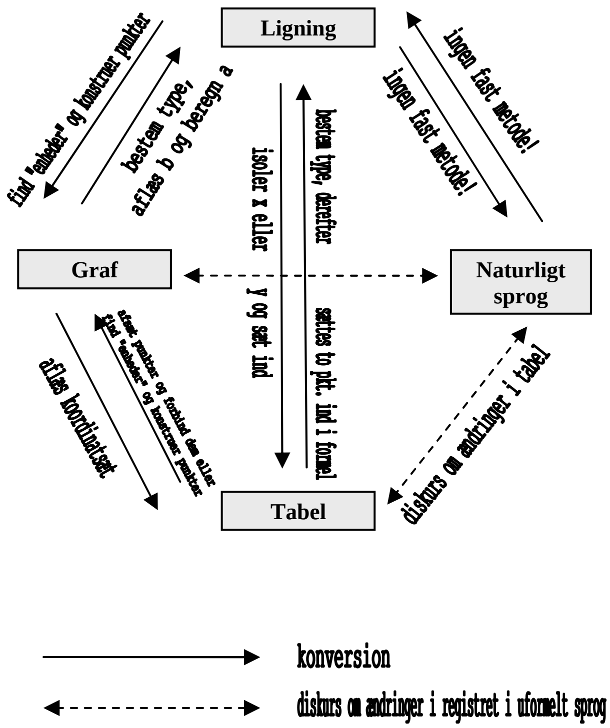


Figur 5-3

Fire nye typer af konversioner dukker op:

- Tabel til ligning: For alle fire typer findes der formler, hvor man ved hjælp af to punkter kan bestemme ligningen. For at vælge den rigtige formel er det nødvendigt først at bestemme typen af sammenhæng.
- Ligning til tabel: Her kan man ikke være sikker på, at den rigtige variabel er isoleret i ligningen. Så operationen ”at isolere *x* eller *y* i ligningen” for hver af de fire typer af sammenhænge skal også gennemgås.
- Graf til ligning: Viden om den grafiske fortolkning af koefficienterne i ligningen gør, at hvis man kender typen af sammenhæng, kan man i visse tilfælde finde ligningen uden at lave en tabel først.
- Ligning til graf: Koefficienten *b* angiver et startpunkt og koefficienten *a* angiver de additive og multiplikative ændringer, der skal til for at konstruere grafen.

Som nævnt er modellering og konversioner mellem naturligt sprog og det symbolske register ikke en del af dette speciale, men eleverne skal arbejde med dette senere således, at de til slut har arbejdet med følgende konversioner (se Figur 5-4):



Figur 5-4

Jeg har nu skitseret den overordnede struktur af forløbet, men har kun nævnt punkt 3 og 4 fra afsnittet om den tilsigtede viden om henholdsvis covariation og konversioner. Til slut vil jeg nævne, hvornår de andre punkter tages op. De første to punkter om symmetri og operationer i de enkelte registre, som bevarer det matematiske objekt, skal selvfølgelig tages op først, da elevernes generelle viden om de tre registre skal udbygges, før vi arbejder med specifikke typer af sammenhænge. De tre sidste punkter om monotoniforhold, fordoblings/halverings-tid og omvendte sammenhænge besluttede jeg at tage op i to etaper: Første gang uden det symbolske register og anden gang med det symbolske register. Denne beslutning blev taget på baggrund af min generelle målsætning om at få så mange som muligt af klassens elever aktivt med i undervisningen i den første del af forløbet.

5.7 Matematiske afgrænsninger og brug af IT-hjælpemidler

Jeg besluttede, at jeg ville indsnævre det matematiske felt, som skulle benyttes i forløbet, på baggrund af følgende fire punkter:

- Der skulle arbejdes udelukkende med tabeller, grafer og ligninger.
- Begrebet ”en variabelsammenhæng” skulle defineres som en ligning.
- De enkelte typer af variabelsammenhæng skulle defineres ved hjælp af tabeller.
- Alle variabelsammenhænge i forløbet skulle skulle være af typerne lineær, eksponentiel, potens og logaritmisk.

I afsnit 3.4 skrev jeg at enhver repræsentation kun indeholder den partielle information om det matematiske objekt, hvilket kan give anledning til flertydigheder. Da ligninger indeholder mere information end grafer og tabeller valgte jeg som nævnt at definere en variabelsammenhæng som en ligning, men det betyder, at der til en givet tabel eller graf kan høre mere end én variabelsammenhæng. Det sidste punkt ovenfor sørger for at fjerne denne flertydighed.

Derudover var det på forhånd nødvendigt at overveje hvilke IT-hjælpemidler, der med fordel kunne benyttes i forløbet. Det skal her bemærkes, at grafiske lommeregnere ikke er obligatoriske på C-niveau, og at langt de fleste af eleverne i forsøgsklassen ikke havde en grafiske lommeregner, men en lommeregner fra folkeskolen, som dog kunne udregne logaritmer, rødder og potenser. Da det var et krav, at regression for hver af de fire typer af sammenhænge skulle indgå i forløbet, og da eleverne allerede havde lært at bruge Excel i grundforløbet til lineær regression, var det mest praktisk fortsat at bruge Excel. Bemærk, at sætningen om konversion fra tabel med to punkter til ligning kan illustreres ved brug af Excel, da to punkter og angivelse af type er tilstrækkelig information til at Excel kan foretage regression. Den eneste alvorlige ulempe ved Excel er, at der bruges den naturlige logaritme og grundtallet e i ligningerne.

5.8 Arbejdsformer

Jeg vil starte med at gentage hvad jeg skrev i afsnit 2.3 nemlig, at der i dette speciale ikke fokuseres på spillet mellem lærer og elev eller opbygningen af de enkelte undervisningsmoduler, hvilket betyder, at jeg ikke vil beskrive valget af arbejdsformer i stor detalje.

Klassens lave ambitionsniveau, dårlige disciplin og lave faglige niveau gjorde, at jeg på forhånd udelukkede længerevarende projektarbejde, hvor stor selvstændighed ville være påkrævet. På den anden side set lagde den valgte covarianstilgang op til eleverne skulle have meget tid til selv at finde systemer i tabeller, tegne grafer og så videre, og i den første del af forløbet, hvor der ikke skulle indgå ligninger, ville mængden af egentlig teori (i traditionel forstand) være begrænset, så snart den indledende introduktion havde fundet sted.

Kompromiset blev, at der til hvert modul (af 100 minutters varighed) i starten af timen skulle udleveres et antal opgaveark, og i slutningen af timerne skulle der udleveres nogle tilhørende noter. Det enkelte modul skulle foregå sådan, at først var der gennemgang af lektie og derefter en kort introduktion til dagens emne. Mindst halvdelen af tiden skulle bruges på at løse de udleverede opgaver, og de sidste ca. 10 minutter skulle bruges på at gennemgå et par af dagens opgaver. De opgaver, som eleverne ikke kunne nå at lave færdige, blev lektie til næste time sammen med de udleverede noter. Både opgaver og noter kunne efter timen lægges på nettet, så fraværende elever også kunne følge undervisningen. I den sidste del af forløbet, hvor ligninger også skulle behandles, ville vægten i højere grad lægges på klasseundervisningen på grund af den større mængde af teori, og noterne ville her blive udleveret i starten af modulet, så de kunne bruges til opslag under opgaveregningen.

Mine argumenter for at jeg valgte at dele opgaveark og noter ud til hver time i stedet for at lave et samlet hæfte med opgaver og noter var følgende:

1. Jeg ville have eleverne til at tænke selvstændigt i stedet for at bladre i noter under opgaveløsning.

2. Det skulle være soleklart hvad der skulle præsteres i det enkelte modul.
3. Jeg ville have mulighed for at justere sværhedsgraden af opgaverne undervejs.

Det sidste punkt hænger sammen med, at jeg var usikker på hvordan eleverne ville tackle covariation-tilgangen, så jeg havde svært ved at vurdere sværhedsgraden og omfanget af opgaverne og ville have mulighed for at regulere dette undervejs.

5.9 Det teoretiske indhold af undervisningsmaterialet

5.9.1 Introduktion til præsentationen af det teoretiske indhold

Da jeg havde fastlagt den tilsigtede viden, miljøet, arbejdsformerne og rækkefølgen i gennemgangen opstillede jeg på basis af den valgte covarianstilgang en række definitioner og sætninger, som skulle udgøre det teoretiske indhold i specialet, og som skulle stå i det undervisningsmateriale, der skulle udleveres til eleverne. Processen med at definere, bevise og udvælge var lang og snørklet og ville ikke blive præsenteret i sin helhed for læseren. I stedet vil jeg først præsentere slutresultatet - uden kommentarer – og derefter argumentere for de vigtigste valg jeg traf undervejs.

De følgende sider er alle klippet ud fra de undervisningsnoter, som jeg lavede, dog er definitionen af additive og multiplikative ændringer forkortet en smule. Det er klart, at grafer og generelle udsagn om det grafiske register er en vigtig del af forløbet, men for at begrænse denne præsentation af det teoretiske indhold har jeg valgt at nøjes med definitionerne og sætningerne fra noterne. Det skal bemærkes, at nummereringen af definitioner og sætninger ikke er en del af noterne, men er foretaget for nemmere at kunne lave referencer, når jeg senere argumenterer for mine valg.

5.9.2 Det teoretiske indhold af noterne.

1. Def. af additive og multiplikative ændringer *(fra noterne til modul 2, appendiks s.115)*

x	0	2	4	6	8	10	12	plus 2
y	1	2	4	8	16	32	64	gange 2

Den additive ændring for x er 2, og *den multiplikative ændring for y* er 2. Desuden indføres den konvention at skrive "ændringerne" i tabellen ind på den plads i tabellen, der er længst til højre...(Det skal bemærkes at dette uddrag er forkortet i forhold til noterne).

2. Definition af en lineær sammenhæng *(fra noterne til modul 2, appendiks s.116)*
Hvis forskellen mellem de efterfølgende x-værdier er konstant, så er forskellen mellem de efterfølgende y-værdier også konstant. Eksempel på en lineær sammenhæng:

x	3	4	5	6	7	8	9	plus 1
y	0	3	6	9	12	15	18	plus 3

3. Definition af en eksponentiel sammenhæng *(fra noterne til modul 2, appendiks s.116)*
Hvis forskellen mellem de efterfølgende x-værdier er konstant, så er forholdet mellem de efterfølgende y-værdier også konstant. Eksempel på en eksponentiel sammenhæng:

x	0	2	4	6	8	10	12	plus 2
y	1	2	4	8	16	32	64	gange 2

4. Definition af en logaritmisk sammenhæng *(fra noterne til modul 2, appendiks s.116)*
Hvis forholdet mellem de efterfølgende x-værdier er konstant, så er forskellen mellem de efterfølgende y-værdier også konstant. Eksempel på en logaritmisk sammenhæng:

x	1	2	4	8	16	32	64	gange 2
y	0	5	10	15	20	25	30	plus 5

5. Definition af en potens-sammenhæng *(fra noterne til modul 2, appendiks s.116)*
Hvis forholdet mellem de efterfølgende x-værdier er konstant, er forholdet mellem de efterfølgende y-værdier også konstant. Eksempel på en potens-sammenhæng:

x	1	2	4	8	16	32	64	gange 2
y	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	gange 10

6. Definition af et system i en tabel (fra noterne til modul 3, appendiks s. 117)
Når man både for x og y har afgjort om ændringerne er additive eller multiplikative og har bestemt ændringernes størrelse, siger vi, at man har fundet et system i tabellen. Et system for en tabel er altså præcis den søjle, som vi per konvention tilføjer længst til højre i tabellen.

7. Sætning (fra noterne til modul 3, appendiks s. 119)
Der skal tre punkter til at bestemme et system i en tabel.

8. Sætning (fra noterne til modul 3, appendiks s. 120)
Hvis man kun ser på tabeller af typen lineær, potens, eksponentiel eller logaritmisk gælder følgende: Der kan godt være to (eller flere) forskellige systemer i den samme tabel, men alle systemer er af samme type.

9. Sætning (fra noterne til modul 3, appendiks s. 120)
Når man kun arbejder med vores 4 typer af sammenhænge, gælder følgende:
Hvis et enkelt punkt og et system er givet i en tabel, har man fastlagt præcis hvilken variabelsammenhæng der er tale om.

10. Definition af en voksende variabelsammenhæng

(fra noterne til modul 6, *appendiks s. 126*)

En variabelsammenhæng siges at være voksende, hvis enhver positiv additiv ændring af x giver en positiv additiv ændring af y.

11. Definition af en aftagende variabelsammenhæng

(fra noterne til modul 6, , *appendiks s. 126*)

En variabelsammenhæng siges at være aftagende, hvis enhver positiv additiv ændring af x giver en negativ additiv ændring af y.

12. Definition af fordoblingstid for en eksponentielt voksende sammenhæng

(fra noterne til modul 6, *appendiks s. 127*)

Den additive ændring af x, som giver en multiplikativ ændring af y på 2 for en eksponentielt voksende sammenhæng, kaldes fordoblingstiden, hvilket noteres T_2.

13. Definition af halveringstid for en eksponentielt aftagende sammenhæng

(fra noterne til modul 6, *appendiks s. 129*)

Den additive ændring af x, som giver en multiplikativ ændring af y på $\frac{1}{2}$ for en eksponentielt aftagende sammenhæng, kaldes halveringstiden, hvilket noteres $T_{\frac{1}{2}}$.

14. Definition af omvendte sammenhænge (Fra noterne til modul 6, appendiks s. 132)

Hvis man har en variabelsammenhæng i form af en tabel, så defineres den omvendte sammenhæng, som den variabelsammenhæng, der fremkommer ved at bytte rundt på de tal der hører til y og x.

15. Sætning om omvendte sammenhænge (Fra noterne til modul 6, appendiks s. 132)

- *Den omvendte sammenhæng til en lineær sammenhæng er en lineær sammenhæng.*
- *Den omvendte sammenhæng til en potens-sammenhæng er en potens-sammenhæng.*
- *Den omvendte sammenhæng til en eksponentiel sammenhæng er en logaritmisk sammenhæng.*
- *Den omvendte sammenhæng til en logaritmisk sammenhæng er en eksponentiel sammenhæng.*

16. Sætning *(Fra noterne til modul 7,* ***, appendiks s. 135*** *)*

Ligningen for en eksponentiel sammenhæng er $y = b \cdot a^x$ *, hvor a er et positivt tal.*

- *b* er grafens skæring med *y*-aksen, det vil sige den *y*-værdi der svarer til $x = 0$
- *a* er den multiplikative ændring for *y*, der svarer til en additiv ændring for *x* på 1.

x	*plus 1*
y	*gange a*

17. Sætning *(Fra noterne til modul 8 og 9****, appendiks s. 139****)*

Ligningen for en potens-sammenhæng er $y = b \cdot x^a$

- Koefficienten *b* er y-koordinaten til det punkt, hvor *x*-kordinaten er 1.
- *Koefficienten a er den potens, som den multiplikative ændring af x skal opløftes i for at man får den multiplikative ændring af y.*

18. Fra noterne til modul 8 og 9***, appendiks s. 142***:

Sætning 1 om ligningen for en eksponentiel sammenhæng (et punkt og system kendt)

Hvis en tabel har følgende struktur

x	*0*	*plus h*
y	*b*	*gange k*

er den tilhørende ligning $y = b \cdot a^x$ *, hvor b kan aflæses i tabellen,*

og a kan beregnes som $a = k^{\frac{1}{h}}$ *, hvilket er ensbetydende med* $a^h = k$.

Heraf følger, at når der lægges h til x, ganges y med a^h.

19. Fra noterne til modul 8 og 9***, appendiks s. 145***:

Sætning 2 om ligningen for en eksponentiel sammenhæng (to punkter og type kendt)

Hvis man har en tabel med to punkter

x	...	x_1	x_2	...
y	...	y_1	y_2	...

, og det er givet at man skal finde en eksponentiel sammenhæng, så er den tilhørende ligning på formen $y = b \cdot a^x$ *, hvor koefficienterne a og b findes på følgende vis:*

$$a = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} \quad \text{og} \quad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

20. Definition af den logaritmiske sammenhæng log(x)

(modul 8 og 9, *appendiks s. 146*)

Variabelsammenhængen $y = \log(x)$ *defineres som den logaritmiske sammenhæng, hvis tabel indeholder punkterne (1,0) og (10,1).*

21. Regneregel for logaritmer (modul 8 og 9, appendiks s. 146)

$\log(a^x) = x \cdot \log(a)$ *, hvor a er et positivt tal, og x er et vilkårligt tal.*

22. Fra noterne til modul 8 og 9***, appendiks s. 148***:

Sætning 3 om ligningen for en potens-sammenhæng (et punkt og system kendt)

Hvis en tabel har følgende struktur

x	*1*	*gange h*
y	*b*	*gange k*

, er den tilhørende ligning $y = b \cdot x^a$ *,hvor b kan aflæses i tabellen,*

og a kan beregnes som $a = \frac{\log(k)}{\log(h)}$ *, hvilket er ensbetydende med* $h^a = k$ *.*

Heraf følger, at når x ganges med h, ganges y med h^a *.*

23. Fra noterne til modul 8 og 9***, appendiks s. 150***:

Sætning 4 om ligningen for en potens-sammenhæng (to punkter og type kendt)

Hvis man har en tabel på formen

x	...	x_1	...	x_2	...
y	...	y_1	...	y_2	...

og det er givet at man skal finde en potens-sammenhæng, så, er den tilhørende ligning på formen $y = b \cdot x^a$ *, hvor koefficienterne a og b findes på følgende vis:*

$$a = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} \quad og \quad b = \frac{y_1}{x_1{}^a}$$

24. Fra noterne til modul 8 og 9***, appendiks s. 151***:

Sætning 5 om ligningen for en logaritmisk sammenhæng (to punkter og type kendt)

Hvis man har en tabel med to punkter

x	...	x_1	x_2	...
y	...	y_1	y_2	...

, og det er givet at man skal finde en logaritmisk sammenhæng, så er den tilhørende ligning på formen $y = \frac{1}{\log(a)} \cdot \log\left(\frac{x}{b}\right)$,

hvor koefficienterne a og b findes på følgende vis:

$$a = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{y_2 - y_1}} \quad \text{og} \quad b = \frac{x_1}{a^{y_1}}$$

25. Formel for fordoblingstid (Fra noterne til modul 11, appendiks s. 158)

For en eksponentiel sammenhæng med ligningen $y = b \cdot a^x$ *, hvor* $a > 1$

er fordoblingstiden $T_2 = \dfrac{\log(2)}{\log(a)}$

26. Formel for halveringstid (Fra noterne til modul 11, appendiks s. 158)

For en eksponentiel sammenhæng med ligningen $y = b \cdot a^x$ *, hvor* $0 < a < 1$

er halveringstiden $T_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)}$

5.9.3 Argumenter for valget af det teoretiske indhold af undervisningsmaterialet

I dette afsnit vil jeg ikke bare argumentere for mine valg af teori, jeg vil også argumentere for mine valg af notation. En stor del af den teori, der indgår, er i virkeligheden bare den velkendte teori fra gymnasieundervisningen i en anden forklædning, men det var også nødvendigt at indføre helt nye begreber. Overalt i det følgende henviser nummereringen til afsnit 5.9.2.

<u>1. Additive og multiplikative ændringer</u>

Definitionen af additive og multiplikative ændringer er selvfølgelig af fundemental betydning for hele forløbet. Normalt bruges formuleringerne *absolutte og relative ændringer* i gymnasieundervisningen, men da ordene additiv og multiplikativ på mere direkte vis hentyder til regneoperationerne addition og multiplikation, valgte jeg denne formulering. Jeg overvejede at lave en abstrakt definition, hvor der indgår variable i tabellen, men dette ville stride mod ønsket om at udsætte brugen af det symbolske register (tabellen ville være ”en ulv i fåreklæder”):

x	x_0	$x_0 + h$	$x_0 + 2 \cdot h$	$x_0 + 3 \cdot h$	$x_0 + 4 \cdot h$	...
y	y_0	$y_0 \cdot k$	$y_0 \cdot k^2$	$y_0 \cdot k^3$	$y_0 \cdot k^4$	...

For at kunne kommunikere ændringerne på en kompakt og letforståelig måde valgte jeg at indføre den konvention, at ændringerne skulle skrives ind længst til højre i tabellen.

2. - 5. Definitioner af de fire typer af variabelsammenhænge

Da en tabel som nævnt i afsnit 3.4.3 kun indeholder den partielle information om en variabelsammenhæng (ligning), er det problematisk at definere en type af variabelsammenhæng ved hjælp af tabeller. Jeg forsøgte at afhjælpe dette problem ved at bruge naturligt sprog i definitionerne, se for eksempel definitionen for en lineær sammenhæng: Det er underforstået, at man kan medtage de x-værdier, som man ønsker i sin tabel, men for en lineær sammenhæng gælder det, at hvis man udvælger tabelværdier, hvor forskellen mellem de efterfølgende x-værdier er konstant, så er forskellen mellem de efterfølgende y-værdier også konstant. Det udelukkes ikke, at en ”uregelmæssig tabel,” hvor forskellen mellen de efterfølgende tabel-værdier ikke er konstant, kan være en lineær sammenhæng.

Det er et potentielt problem, at eleverne vil identificere de fire typer af variabelsammenhænge med visse regelmæssige tabeller og således ikke tror, at de fire typer af sammenhænge kan have uregelmæssige tabeller (eleverne identificerer det matematiske objekt med den først anvendte repræsentation). I den forbindelse vil jeg nævne en ulempe ved at skrive de additive eller multiplikative ændringer ind i tabellens højre side: Denne repræsentation forstærker den potentielle misforståelse, at alle tabeller skal være regelmæssige. Jeg så ingen nem løsning på problemet. De regelmæssige tabeller bliver nødt til at være i fokus med den valgte tilgang, og problemerne med de uregelmæssige tabeller er svære at løse uden brug af andre registre, som indeholder mere information end det numeriske. Jeg valgte at inddrage tabeller, hvor man ikke altid anvender de additive eller multiplikative ændringer det samme antal gange fra en tabelværdi til den næste, i opgaverne hvilket giver et indtryk af at der er ”huller” i tabellen, men at der findes et overordnet system. Derudover besluttede jeg at lade brugen af grafer udrede problemet, idet valgfriheden til at udvælge tabelværdier kommer naturligt frem i forbindelse med aflæsning af grafer.

En anden ting, som skulle overvejes, da jeg skulle definere de fire typer af sammenhænge, var om jeg skulle angive en form for definitionsmængde. Jeg valgte at lade være fordi jeg ønskede at holde mængden af teori på et minimum i første omgang og besluttede, at man senere, når det grafiske register var til rådighed, kunne arbejde med afgrænsninger for *x* og *y*-værdierne.

Til slut vil jeg præcisere nogle matematiske detaljer, som jeg valgte at udelade i noterne, for at holde den uformelle stil.

- Alle multiplikative enheder skal være positive
- De additive enheder må være vilkårlige tal
- Punktet $(0,0)$ skal per konvention tilføjes til alle potens-sammenhænge

Har en givet tabel af ovennævnte slags altid højst én type? Desværre er svaret nej: Hvis additive ændringer på 0 og multiplikative ændringer på 1 tillades, vil konstante sammenhænge være mulige, hvilket er den vigtigste kilde til flertydigheder af type. Følgende tabel giver en komplet oversigt over flertydigheder (se Figur 5-5):

Ligning	Typer	Tabel				
$x = 0$	Lineær, logaritmisk og potens	x	0	plus 0	gange 1	gange 1
		y	1	plus 1	plus 1	gange 2
$x = konst \neq 0$	Lineær og logaritmisk	x	k	plus 0	gange 1	
		y	0	plus 1	gange 2	
$y = 0$	Lineær, eksponentiel og potens	x	1	plus 1	plus 1	gange 2
		y	0	plus 0	gange 1	gange 1
$y = konst \neq 0$	Lineær og eksponentiel	x	0	plus 1	plus 1	
		y	k	plus 0	gange 1	
$y = ax$	Lineær og potens	x	1	plus 1	gange 2	
		y	a	plus a	gange 2	

Figur 5-5

Tabellen skal læses på den måde, at der til ligningen $x = 0$ svarer sammenhænge af typerne lineær, logaritmisk og potens, fordi de tre viste systemer i tabellen i den højre søjle er af disse tre typer.

Det er nemt at se på tabellerne til højre, at de ovenstående flertydigheder er mulige. Det kræver et bevis, at der ikke er flere flertydigheder, dette gøres nemmest i det symbolske register ved at udnytte viden om skæringspunkter med akserne undervejs. Jeg valgte, at undgå additive ændringer på *0* og multiplikative ændringer på *1*, sådan at der kun var en enkelt flertydighed, altså den sidste i tabellen.

<u>6. – 9. Definition af system samt tilhørende sætninger</u>

For at lette notationen valgte jeg som nævnt at definere et ”system” som et sæt af additive eller multiplikative ændringer for *x* og *y*. Et givet system i en tabel fastlægger derfor typen af variabelsammenhæng. Men som der står i sætning nummer *8* fastlægger en givet variabelsammenhæng ikke systemet entydigt. Et problem på dette stadie er, at man med de tilgængelige teknikker i det numeriske register ikke kan give en præcis betingelse for, hvornår to systemer er ens. Se for eksempel denne tabel:

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
y	*1*	*4*	*9*	*16*	*25*	*36*	*49*	*64*	*81*

Her kan man udvælge systemerne:

x	*gange 2*
y	*gange 4*

x	*gange 3*
y	*gange 9*

x	*gange 4*
y	*gange 16*

Alle tre systemer er ”lovlige” og kan bruges til at konstruere grafen. Jeg valgte i første omgang at koncentrere mig om *kommensurable* systemer i den forstand, at to systemer er kommensurable, hvis det ene systemer fremkommer ved gentagen brug af det andet system. Det første og det sidste system er kommensurable, da det sidste system fremkommer ved at bruge det første system to gange. Dette er nemt forståeligt og er tilstrækkeligt til at give en fornemmelse for, at der altid er uendeligt mange ”lovlige” systemer. Jeg besluttede at give den generelle betingelse for ækvivalens af systemer senere, når den kunne bevises i det symbolske register. Det skal bemærkes, at jeg syntes at ordet kommensurabel var for usædvanligt til, at jeg inkluderede det i undervisningen.

Sætning nummer 7 og 9 er vigtige af følgende grunde:

- Når man arbejder med uregelmæssige tabeller er det nødvendigt at vide hvor meget information, der skal vælges ud for at typen af sammenhæng kan bestemmes.
- Det er praktisk at kende den minimale information, der skal til for at tegne grafer.

Der er nemt at indse, at to punkter i en tabel ikke er nok til at finde et system, da ændringerne kun gentages enkelt gang, og man ikke kan se, om de er additive eller multiplikative. Det er også nemt at indse, at tre punkter, som er fremkommet ved gentagen brug af de samme additive eller multiplikative ændringer, er nok til at bestemme et system. Men det er ikke umiddelbart klart, at man med tre arbitrære punkter samt oplysning om at sammenhængen er en af de fire typer altid kan bestemme et system (sætning nummer 7). Mit bedste forslag til et bevis er, at man altid kan bruge to af punkterne til at bestemme fire ligninger, én af hver af de fire typer. Nu vil det sidste punkt passe ind i mindst en af ligningerne, da det var en forudsætning at typen var en af vores fire sædvanlige. Hvis sammenhængen er ligefrem proportional, er typen både potens og lineær, ellers er typen entydigt bestemt. I alle tilfælde kan man nu finde et system.

Sætning nummer 8 vil jeg ikke bevise, men kun tilføje, at konstante sammenhænge og proportionalitets-sammenhænge som nævnt faktisk strider mod sætningen, da disse variabelsammenhænge er af flere typer samtidig, og alle systemer til en givet tabel derfor ikke nødvendigvis er af samme type. Man kan vise sætning 8, med den nævnte undtagelse, ved at vise at mit skema over flertydigheder ovenfor er korrekt.

Sætning nummer 9 kan bevises nemt, da kendskab til systemet fastlægger typen af sammenhæng, og systemet kan bruges til at konstruere et andet punkt. Derefter kan de velkendte sætninger, hvor ligningen bestemmes ved hjælp af to punkter og information om type, anvendes.

Interpolation (ingen sætninger om dette i noterne)

Når man har givet et antal punkter i en tabel og et system, er det muligt at udvide tabellen. Den nemmeste måde at udvide tabellen på er at bruge det givne system gentagne gange og dermed få enten større og større værdier eller mindre og mindre værdier. Men når man skal tegne grafer, kan det være nyttigt at kunne finde en tabelværdi *mellem* to givne tabelværdier, og her bliver man nødt til at interpolere: Man skal finde et system som er ækvivalent med det givne, men med mindre enheder. For lineære sammenhænge er det ligetil at interpolere, fordi det er nemt at opdele de additive enheder i mindre stykker, man kan for eksempel halvere enhederne. Men for de tre andre typer af sammenhænge indgår der multiplikative enheder, og det komplicerer sagerne.

Jeg overvejede om der i forløbet skulle indgå egentlig teori om interpolation, her er en oversigt over det forslag, som jeg kom frem til (se Figur 5-6):

Additiv enhed			Multiplikativ enhed	
h	Der lægges h til (den enhed som er givet til at starte med)		k	Der ganges med k (den enhed som er givet til at starte med)
$m \cdot h$	Der lægges h til i alt m gange		k^m	Der ganges med k i alt m gange
$\frac{1}{n} \cdot h$	h deles op i n lige store stykker hvis sum er h		$k^{\frac{1}{n}}$	k deles op i n lige store stykker, hvis produkt er k
$\frac{m}{n} \cdot h$	h deles op i n lige store stykker hvis sum er h, og denne nye enhed lægges til i alt m gange		$k^{\frac{m}{n}}$	k deles op i n lige store stykker, hvis produkt er k, og der ganges med denne enhed i alt m gange

Figur 5-6

x	plus h
y	gange k

Af skemaet kan man for eksempel læse, at hvis man har at gøre med en eksponentiel sammenhæng med det øverste system til højre herfor, så er alle systemer på den form, der angives af det nederste system, hvor *n* er et helt tal, ækvivalente med det øverste system.

x	plus $\frac{1}{n} \cdot h$
y	gange $k^{\frac{1}{n}}$

Jeg undlod at medtage teorien om interpolation, fordi det stred mod mit udgangspunkt om at udskyde brug af det symbolske register og valgte at basere interpolationen for de tre nye typer af sammenhænge på kvadratrødder (det vil sige tilfældet $n = 2$ i tabellen). Ved gentagen brug af kvadratrødder kan man finde så små multiplikative enheder, som man ønsker.

<u>10. - 13. Voksende og aftagende sammenhænge, fordoblings- og halveringstid</u>

Jeg vil knytte en enkelt kommentar til disse meget oplagte definitioner i mit set-up: Det er underforstået i definitionerne af fordoblings- og halveringstid, at flere ækvivalente systemer er mulige til en givet eksponentiel sammenhæng, men at kun et enkelt af disse systemer har en multiplikativ ændring af y på henholdvis 2 og ½.

<u>Monotoniforhold</u>

Det er min påstand, at tankegangen med additive og multiplikative ændringer og gentagen brug af disse kan hjælpe eleverne med at lave undersøgelser af monotoniforhold på et tidligere stadie, end de normalt vil være i stand til ved hjælp af de traditionelle metoder. Når man kender et system og et punkt, kan man ved at gentage systemet igen og igen forestille sig en proces, hvor *x* går mod uendelig eller mod nul. På denne måde kan man undersøge om koordinatsystemets akser er asymptoter eller om akserne skæres af grafen, og det er nemt at se, om det er en voksende eller aftagende sammenhæng. Hvor gentagen brug af en (positiv) multiplikativ enhed ikke kan medføre et skift af fortegn, kan dette sagtens ske med en additiv enhed. Hermed kan det slås fast, at graferne for eksponentielle og logaritmiske sammenhænge skærer henholdsvis *y* og *x*-aksen og at *y* for en potenssammenhæng enten går mod enten nul eller uendelig, når *x* går mod nul.

<u>14. – 15. Definition og sætning om omvendte sammenhænge</u>

Når omvendte sammenhænge defineres ved hjælp af ombytning af *x*- og *y*- værdier i en tabel, gør repræsentationen for et system det nemt at bevise hvilken type den omvendte sammenhæng har for hver af de fire typer af variabelsammenhænge.

<u>16. – 24. Ligninger for de tre nye typer af sammenhænge</u>

Jeg havde følgende målsætninger om den sidste del af forløbet, der skulle omhandle ligninger:

- Der skulle lægges vægt på koordination af ændringer i det numeriske, grafiske og symbolske register.
- Alle sætninger om konversion fra tabel (med to punkter) til ligning skulle bevises.
- Jeg ville bevise nogle generelle betingelser for hvornår systemer er ækvivalente.

Det første punkt er vigtigt, fordi jeg ville undgå, at den sidste del af forløbet skulle bestå af en masse udenadslære, som ikke havde forbindelse til den første del af forløbet. De to sidste punkter er vigtige, fordi jeg ønskede et afrundet forløb uden løse ender.

Da logaritmiske sammenhænge ikke var del af kernestoffet i bekendtgørelsen, besluttede jeg at nedtone deres rolle i den sidste del af forløbet og primært bruge logaritmer som et værktøj, der er nødvendigt for at udlede de andre formler.

For at lægge vægt på koordination af ændringer i det numeriske, grafiske og symbolske register besluttede jeg for både de eksponentielle sammenhænge og potens-sammenhængene at gå frem i tre etaper:

1. Ligningen opskrives uden bevis, og koefficienterne fortolkes vha. graf og tabel.
2. En sætning, hvor ligningen bestemmes ved hjælp af et punkt og et system bevises.
3. En sætning, hvor ligningen bestemmes ved hjælp af to punkter, bevises.

Etape nummer to har den fordel, at man her kommer frem til formler, hvor koefficienten *a* bestemmes ved hjælp af de additive eller multiplikative ændringer, og således undervejs beviser de generelle betingelser for hvornår to systemer er ækvivalente! To systemer er nemlig ækvivalente præcis, hvis de giver den samme *a*-værdi. Ved at dele op i tre etaper på denne måde, blev alle målsætningerne derfor opfyldte.

Det var vanskeligt at vælge en passende notation for de additive og multiplikative ændringer i det symbolske register. Som nævnt i afsnit 3.10 foreslår Confrey og Smith notationen Δx for additive ændringer og ® x for multiplikative ændringer, men jeg fandt denne notation for klodset, da potenser med Δx eller ® x i eksponenten nemt kan forvirre en elev, som i forvejen har vanskeligheder med det symbolske register. Af denne årsag valgte jeg at give afkald på at notationen skulle afspejle om en ændring var additiv eller multiplikativ, og valgte i stedet at *h* generelt skulle betegne ændringen for *x*, og at *k* generelt skulle betegne ændringen for *y*.

5.10 Skema over forløbet

Modul	Dato	Emne	*Registre*	Bemærkninger
1	man 12. marts	Symmetri af grafer og ligninger.	*Graf og ligning*	
2	tirs 13. marts	Additive og multiplikative ændringer i tabeller. Definition af de fire typer af sammenhænge.	*Tabel*	
3	tors 15. marts	Def. af system, tilsyneladende forskellige systemer kan være ens. Konstruktion af grafer vha. tre punkter.	*Tabel og graf*	
4	fre 16. marts	Bestemmelse af system og type for grafer.	*Tabel og graf*	TEST
5	man 19. marts	Interpolation, konstruktion af graf, når to punkter og type er kendt (i hånden og med Excel).	*Tabel og graf*	EDB-lokale er reserveret
6	fre 23. marts	Fordoblingstid, halveringstid, monotoniforhold og omvendte sammenhænge (i hånden og med Excel).	*Tabel og graf*	EDB-lokale er reserveret
7	man 26. marts	Tabel til ligning og graf til ligning for eksponentielle sammenhænge, grafisk tolkning af koefficienterne (ingen beviser).	*Tabel, graf og ligning*	
8	tirs 27. marts	Tabel til ligning og graf til ligning for potens-sammenhænge, tolkning af koefficienterne. Bevis for sætninger om konversion fra tabel til ligning. Introduktion til aflevering 15 på internettet.	*Tabel, graf og ligning*	EDB-lokale er reserveret
9	tirs 27. marts			*To moduler i træk*
10	fre 30. marts	Fortsat tabel til ligning.	*Tabel, graf og ligning*	AFLEVERING
11	Fre 6. april	Formler for fordoblingstid og halveringstid.	*Tabel, graf og ligning*	
---	Man 16. april	(efter forløbets afslutning)	---------------	AFLEVERING
---	fre 20. april	(efter forløbets afslutning)	---------------	PRØVE

Figur 5-7

Skemaet er ikke en eksakt kopi af det skema, som jeg lavede før forløbet, men viser hvordan forløbet rent faktisk foregik. Jeg havde på forhånd besluttet mig for en rækkefølge i gennemgangen og jeg havde lavet alle opgaverne til timerne (også nogle opgaver, som blev sorteret fra i sidste øjeblik), men havde endnu ikke besluttet præcis hvilke opgaver, der skulle regnes i de enkelte timer. Al teorien i noterne havde jeg også lavet på forhånd, men havde endnu ikke besluttet hvor mange eksempler, der skulle inddrages i noterne. Det skal bemærkes, at jeg oprindeligt havde planlagt, at der skulle være 10 moduler, men da der blev behov for et ekstra modul til at arbejde med ligninger, blev modul 10 et ”ekstramodul,” hvor der ikke blev stillet nye opgaver, men hvor jeg alligevel lavede nogle noter med ekstra eksempler.

5.11 Design af opgaver

Der endte som nævnt med at være 11 moduler og til hvert af disse moduler (bortset fra modul 10) udarbejdede jeg et sæt noter og et sæt opgaver. Både opgaver og noter findes i appendiks. Jeg vil henvise til opgaverne ved at angive modulnummer, opgavenummer og den side i appendiks, hvor opgaven findes, på følgende vis: *(Modulnummer).(Opgavenummer)[(Sidetal)]*. Jeg vil henvise til udvalgte dele af noterne ved at angive modulnummer og sidetal i Appendiks på følgende vis: *(Modulnummer)[(Sidetal)]*. Generelt vil jeg bruge firkantede klammer ”[ ]” til at henvise til sidetal i Appendiks.

5.11.1 Opgaver til modul nummer 1: Skalering og symmetri af grafer og ligninger

Det første modul havde til formål at behandle de første to punkter af den tilsigtede viden. På baggrund af den diagnostiske test og generelle betragtninger om symmetri i det grafiske og symbolske register opstillede jeg 4 potentielle elev-misforståelser, som jeg ville have opklaret ved at stille passende opgaver.

1. Hældningskoeficienten for en ret linje afhænger kun af hvor stejl linjen er på papiret (svarende til linjens vinkel med x-aksen)
2. y-aksen skal altid være den lodrette akse
3. I ligningen for en variabelsammenhæng skal y være isoleret

4. To forskellige ligninger vil altid have to forskellige grafer

Motivationen for misforståelse 1 og 3 var opgaverne i den diagnostiske test om henholdsvis skalering og ligninger, hvor *x* var isoleret. Misforståelse 2 er i princippet bare misforståelse 3 konverteret til det grafiske register og misforståelse 4 anså jeg som relevant idet Kieran (1981) som nævnt i afsnit 3.6.1 kom frem til, at ikke alle elever opfatter lighedstegnet som et ækvivalens-symbol og fordi den diagnostiske test bekræftede dette.

Den eneste introduktion til opgaverne skulle være, at den diagnostiske test viste, at klassen havde visse problemer med tabeller, grafer og ligninger, så det ville vi rette op på før vi startede på det egentlige forløb.

Jeg valgte at lade alle opgaver i dette modul handle om lineære sammenhænge, fordi dette var velkendt stof for eleverne, og jeg ikke ønskede at skabe ekstra forvirring ved at inddrage helt nye typer af sammenhænge.

<u>Opgave om skalering (opgave 1.1[44])</u>

Opgave 1.1 har til hensigt at lede de elever, der tror på misforståelse nummer 1 til en konflikt. Den første delopgave viser nemlig tilsyneladende, at linje nummer 1 har den største hældning, mens delopgave 2 viser at linje 3 har den største hældning, hvis de tre linjer er overført korrekt til det samme koordinatsystem. Denne konflikt kan ikke løses uden erkendelse af, at aksernes skalering betyder noget for hvor stejl en givet linje ser ud i et koordinatsystem.

<u>Opgave om symmetri af graf, tabel og ligning (opgave 1.2[46])</u>

Opgave 1.2 tager fat på misforståelse nummer to og handler om symmetri i alle tre registre. For at kunne overføre linjen fra delspørgsmål a) til koordinatsystemet i delspørgsmål b) skal man aflæse koordinaterne til mindst to punkter på linjen. Her arbejdes der altså i det numeriske register, og man skal bytte rundt på rækkefølgen af de to koordinater, når punkterne skal afsættes i det koordinatsystem, hvor *y*-aksen er lodret.

Denne ombytning af koordinater er netop et udtryk for symmetri i det numeriske register, det vil sige, at delspørgsmål b) handler om koordination af symmetri i det grafiske og numeriske register. De resterende delspørgsmål handler om at finde ligningerne til de to grafer og sammenligne dem. Formålet er at undersøge om eleverne opdager, at de to ligninger er ensbetydende, og i negativt fald tage dette op under opgavegennemgangen. I den forbindelse skal det også tages op, at de to grafer essentielt er ens, de er spejlinger af hinanden, men indeholder akkurat de samme punkter. Derfor er der ikke noget i vejen for at have *x*-aksen som den lodrette akse.

Opgaver om ækvivalente ligninger (opgave 1.3[48] og 1.4[51])

Opgave 1.3 handler om koordination af det grafiske og symbolske register og tager fat på misforståelse tre og fire. De tre ligninger ser forskellige ud og derfor vil en elev, som tror på misforståelse nummer 4, være sikker på at der hører præcis en ligning til hver af graferne. Men ligning 2 og 3 er ækvivalente, så de hører begge til den samme graf. Delspørgsmål b) handler om kontrol, som giver feedback til eleverne: Hvis man har gættet forkert i delspørgsmål a) vil fejlen uundgåeligt komme frem i delspørgsmål b). Pointen med opgaven er altså, at ækvivalente ligninger repræsenterer den samme variabelsammenhæng. Opgave 1.4 understreger denne pointe, idet opgaven kan løses ved at isolere *y* i de to ligninger og derefter sammenligne koefficienterne med linjernes hældninger og skæringer med *y*-aksen, men der er ingen fælder i denne opgave.

Ombytning af x og y i ligning svarer til spejling af graf i linjen $y = x$ (opgave 1.5[53])

Opgave 1.5 har til formål at tage forskud på emnet omvendte sammenhænge, som bliver vigtigt senere i forløbet, når eksponentielle og logaritmiske sammenhænge behandles.

Noter til modul nummer 1: Skalering og symmetri af grafer og ligninger ([114])

Noterne til det første modul havde den rolle, at de skulle indeholde de pointer, der ville komme frem under gennemgangen af opgaverne på tavlen.

5.11.2 Modul nummer to: Additive og multiplikative ændringer i tabeller

Modulet skulle starte med en definition af additive og multiplikative ændringer i tabeller, hvorefter de fire typer af variabelsammenhænge kunne defineres. I noterne til modul 2[115-116] kan man se, hvordan jeg valgte at gribe det an. Det skal understreges, at i alle eksemplerne på tabeller i noterne (og dermed i introduktionen) fremkommer samtlige *x*- og *y*-værdier ved en gentagen proces af additive eller multiplikative ændringer, og disse tabeller kalder jeg som nævnt for *regelmæssige*.

Formålet med opgaverne til modul nummer to var at eleverne skulle lære at bruge begreberne additive og multiplikative ændringer i tabeller og lære at bestemme typen af en variabelsammenhæng ved hjælp af en tabel. Jeg identificerede fire centrale opgavetyper:

I. Bestemmelse af type ud fra en regelmæssig tabel
II. Bestemmelse af type ud fra en uregelmæssig tabel
III. Udvidelse af tabel ved hjælp af additive eller multiplikative enheder
IV. Interpolation: Udvidelse af tabel, hvor de givne additive eller multiplikative enheder skal deles op

Opgavetype I kan løses umiddelbart, når man har forstået definitionerne af additive og multiplikative ændringer samt af de fire typer, og denne opgavetype udgør fundamentet for den valgte co-varianstilgang. Opgave 2.1[56] a) til d) er af denne type. Opgavetype II er sværere, fordi man først skal sortere information fra indtil man har en regelmæssig tabel, husk på at tre punkter er nok til at bestemme typen af sammenhæng. Denne opgavetype er vigtig, da man skal undgå, at eleverne identificerer de nye matematiske objekter med repræsentationer i form af regelmæssige tabeller. Det er vigtigt at fastholde, at en variabelsammenhæng er en ligning, hvor uendeligt mange *x*-værdier og *y*-værdier kan indsættes. Tabeller består af et endeligt antal af disse værdier, som kan udvælges mere eller mindre regelmæssigt. Jeg besluttede, at de første par opgaver med uregelmæssige tabeller skulle være med lineære sammenhænge, fordi forhåndskendskabet til lineære sammenhænge i form af grafer og ligninger ville gøre det nemmere at se de få uregelmæssige tabelpunkter som en del af et kontinuum. Opgave 2.1[56-57] e) til i) er af type II.

Opgave 2.1[57] g) har til formål at få frem, at det ikke er tilstrækkeligt at *den ene* variabel har en additiv eller multiplikativ ændring fra gang til gang, vi leder efter systemer, hvor *begge* variable ændrer sig additivt eller multiplikativt fra gang til gang. Man kan se, at x ændrer sig additivt i tabellen, men da de tilhørende ændringer af y hverken er additive eller multiplikative, er der hverken tale om en lineær eller eksponentiel sammenhæng.

Opgavetyperne III og IV handler begge om at udvide en tabel, men hvor man i type III bare skal fortsætte et allerede eksisterende system, skal man i type IV foretage et skift af system, altså interpolation. Bemærk, at der skal udvikles to teknikker til interpolation: Når ændringerne er additive, skal man givet to punkter bare finde midtpunktet, men når ændringerne er multiplikative, skal man tage kvadratroden af den samlede multiplikative ændring mellem to punkter. De teknikker der udvikles under løsning af opgavetype III og IV skal bruges, når der senere skal konstrueres grafer ud fra et lille antal givne punkter i en tabel, hvilket er et argument for at netop disse opgavetyper er vigtige.

Opgave 2.2, 2.3, 2.4 og 2.5[58-59] er alle af type III og IV. Forskellen mellem opgave 2.2 og 2.3 er, at i opgave 2.2 gentages den samme ændring en enkelt gang fra en tabelværdi til den næste, mens ændringen gentages flere gange i opgave 2.3 – og ikke altid det samme antal gange fra en tabelværdi til den næste.

5.11.3 Modul nummer 3: Systemer og konstruktion af grafer

Målet med tredje modul var at konstruere graferne for de tre nye typer af sammenhænge og i første omgang bare se, hvordan de ser ud. Derfor udsatte jeg nogle af de mere tekniske detaljer om interpolation til senere. Jeg valgte, at alle konstruktioner skulle baseres på tabeller med tre punkter, hvor typen ikke var givet, men hvor typen var nem at finde. Grunden til at der netop skulle være tre punkter var, at dette er det mindst mulige antal punkter der skal til for at bestemme typen. For at pointere dette skulle modulet starte med gennemgang af definitionen af et system i en tabel og følgende sætninger (se noterne til modul 3[117-121]):

- Der skal tre punkter til at bestemme et system i en tabel
- Der kan godt være to (eller flere) forskellige systemer i den samme tabel, men alle systemer er af samme type
- Givet et punkt og et system er variabelsammenhængen fastlagt

Der er ikke meget at tilføje til opgaverne 3.1 til 3.4[61-64] andet end at alle fire typer af sammenhænge forekommer og at jeg valgte grafvinduet sådan, at grafen i alle fire tilfælde lige akkurat kan være der.

5.11.4 Modul nummer 4: Bestemmelse af typen ved hjælp af grafer

Essensen af opgaverne til dette modul er at kunne finde et gyldigt system til en givet graf og dermed bestemme typen. Jeg valgte at udskyde diskussionen af kendetegn som for eksempel skæringspunkter med akserne til senere, og tog udgangspunkt i, at graferne for de tre nye typer af sammenhænge ikke er lineære og umiddelbart ligner hinanden. I noterne til modul 4[122-123] kan man se den generelle metode, som er baseret på det faktum, at tre punkter er nok til at bestemme typen.

Opgave 4.1 til 4.4[66-69] dækker alle fire typer ind, bemærk, at der er gjort plads til, at man skal skrive systemet ind på løsningsarket. Opgave 4.5 og 4.6[70-71] er tænkt som ekstraopgaver og handler om at kende forskel på eksponentielle sammenhænge og potens-sammenhænge. Opgave 4.6 kan føre til diskussion af hvor hurtigt eksponentielle og potens-sammenhænge vokser, og hvad man generelt kan sige om hvilken graf der ligger øverst, hvis to punkter er til fælles.

5.11.5 Test i modul 4 om symmetri samt additive og multiplikative ændringer i tabeller

I slutningen af forløbets første uge planlagde jeg af to grunde en halv-times test:

1. Jeg ville have eleverne til at gøre en ekstra indsats for at forstå grundbegreberne
2. Jeg ville gerne have feedback på et tidligt tidspunkt i forløbet

Pensum i testen skulle være opgaver og noter til de første tre moduler, men jeg valgte at prioritere opgaver om symmetri og tabeller højere end opgaver om grafer, da grafer skulle behandles dagen før testen, så alle ikke ville have tid til at læse på dette.

Mit formål med opgave 1) og 2)[73-74] om tabeller var at undersøge om:

- Eleverne havde forstået begreberne additiv ændring og multiplikativ ændring.
- Eleverne i simple tilfælde kunne genkende de fire typer af sammenhænge i tabeller.
- Eleverne kunne udvide tabeller i simple tilfælde.

Opgave 1)[73] handler om bestemmelse af de fire typer af variabelsammenhænge. Jeg valgte at involvere udelukkende regelmæssige tabeller – jeg ville bare kontrollere om eleverne havde forstået definitionerne af de fire typer af sammenhænge.

Opgave 2)[74] handler om at finde systemer og udvide tabeller. I opgaverne b, c, d og e er der tale om regelmæssige udvidelser, hvor de additive eller multiplikative enheder kun skal bruges en enkelt gang, men for at se om eleverne havde forstået, at alle tabeller ikke behøver at være regelmæssige indlagde jeg fælder i opgaver a og f, hvor nogle af tabelværdierne skulle beregnes ved at bruge systemet to gange. Delspørgsmål g handler om simpel lineær interpolation, jeg valgte at vente med spørgsmål om ikke-lineær interpolation til der var gennemgået flere eksempler om dette.

Formålet med opgave 3), 4) og 5)[75-77] om symmetri af grafer og ligninger var at undersøge om:

- Eleverne kunne koordinere det grafiske og symbolske register for lineære sammenhænge
- Eleverne havde forstået om ækvivalente ligninger repræsenterer samme variabelsammenhæng
- Eleverne kunne arbejde med grafer, hvor x-aksen var lodret

Opgave 3)[75] er en simpel undersøgelse af om eleverne kunne fortolke koefficienterne i ligningen for en lineær sammenhæng. De forkerte svarmuligheder er udvalgt sådan at koefficienterne lige som i det rigtige svar er to eller et.

Opgave 4)[76] minder umiddelbart om opgave 3), men jeg har medtaget to svarmuligheder, hvor *y* ikke er isoleret og hvor den ene er ækvivalent med den (korrekte) ligning, hvor *y* er isoleret. For at den korrekte mulighed 3 skal virke utiltalende, har jeg valgt at omskrive ligning 2 til en ligning, hvor der ikke optræder et *8*-tal, og samtidig har jeg ladet den forkerte mulighed ligning 1 indeholde et *8*-tal. Formål er et undersøge om eleverne stadig har en tendens til at lade sig drage af disse overfladiske visuelle parametre.

Opgave 5)[77] minder om de to andre, men her er der ikke to løsninger. Meningen er at undersøge om eleverne kan koordinere koordinatsystemer hvor *x*-aksen er lodret med ligninger, hvor *x* er isoleret. Den forkerte svarmulighed 2 er medtaget, fordi dette er det oplagte svar, hvis man ikke forstår, at det gør en forskel, at *x*-aksen er lodret. Den forkerte svarmulighed 1 er medtaget af samme grund, men hvor hældningen hænger sammen med en skaleringsrelateret misforståelse: ”Grafen går to tern hen og et tern op.” Denne misforståelse søgte jeg også at fiske efter med svarmulighed 3.

5.11.6 Modul nummer 5: Interpolation af konstruktion af grafer

Hvor opgaverne i modul 3 handler om konstruktion af grafer ud fra tabeller med 3 punkter, som nemt udvides til passende tabeller ved gentagen brug af systemet, handler opgaverne i modul 5[78-83] om at konstruere grafer ud fra to arbitrære punkter og kendskab til type. I noterne til modul 5[124-125] opridses to metoder svarende til opgavetype III og IV i modul 2: Gentagen brug af de det eksisterende system eller interpolation. Opgaverne 5.1, 5.2 og 5.3[79-81] svarer til den første opgavetype, da de to givne punkter på grafen er tæt på hinanden, mens opgave 5.4 og 5.5[82-83] svarer til den sidste opgavetype, da punkterne er langt fra hinanden, og man bliver tvunget til at foretage interpolation. Opgaverne i dette modul handler altså om koordinere de metoder man har lært i det numeriske register med det grafiske register.

En fordel ved at basere alle opgaverne på oplysninger om to givne punkter og typer er, at man nemt kan kontrollere, om man har tegnet de rigtige grafer ved hjælp af Excel, dette er hvad opgave 5.6[83] går ud på.

5.11.7 Modul nummer 6: Monotoniforhold, omvendte sammenhænge og fordoblings og halveringstid.

Modul 2 til 5 handlede om at indføre de fire nye typer at sammenhænge og koordinere repræsentationer for dem i det numeriske og grafiske register. I henhold til min beslutning om at udsætte brugen af det symbolske register ville modul 6 derfor være det rigtige tidspunkt til at gå videre med fordoblings- og halveringstider, monotoniforhold og omvendte sammenhænge.

På de første fire sider af noterne til modul 6[126-129], som blev gennemgået først i modul 6, kan man se hvordan jeg valgte at definere aftagende og voksende variabelsammenhænge samt halverings- og fordoblingstid – alt sammen i det numeriske register. For at give en dybere forståelse af disse begreber valgte jeg at inddrage det grafiske register så meget som muligt og valgte at repræsentere halverings- og fordoblingstider ved hjælp af halvering/fordobling af søjler under graferne, som man kan se i eksempel 3 og 4[128-129]. På denne måde koordineres de additive og multiplikative ændringer i det numeriske og grafiske register.

Opgave 6.1, 6.2 og 6.3[85-86] handler om at finde halverings- og fordoblingstid i det numeriske og grafiske register, i opgave 6.1 er tabellerne særligt pæne, så de eksakte værdier kan aflæses. Jeg valgte at inddrage to modelleringsopgaver (opgave 6.4 og 6.5[87]) om halverings- og fordoblingstid baseret på opgave 4.018 og 4.019 fra *Eksamensopgaver i matematik* (Jensen og Touborg 1998) for at vise hvordan man med regression kan transformere de rå ineksakte data til grafer for pæne variabelsammenhænge, og at man derefter kan bruge de samme metoder som i opgaverne 6.2 og 6.3[86].

Opgave 6 og 7[88-89] er i virkeligheden opgaver om monotoniforhold, hvor man først skal bruge udelukkende det numeriske register og siden udelukkende det grafiske register. Excel bruges til sidst som kontrol. Grunden til at der lige netop er 7 delspørgsmål i opgave 6.6[88] er, at de grafer, der kommer frem, skal bruges i en diskussion af omvendte sammenhænge, og at de 7 grafer viser de karakteristiske former af graferne for de tre nye typer af sammenhænge (se de 7 karakteristiske grafer i noterne til modul 6[130-131]). De tre første delspørgsmål behandler alle potens-sammenhænge. Nummer et og tre er begge voksende, men begge eksempler er vigtige, da nummer et viser et eksempel, hvor y vokser hurtigere end x, mens nummer tre viser et eksempel, hvor x vokser hurtige end y. Meningen med opgaven er at koordinere disse ændringer i det numeriske register med globale former i det grafiske register: Hældningen er voksende i delspørgsmål 1 og aftagende i delspørgsmål 3, hvilket giver de to første karakteristiske former af graferne, som kan ses på side [130] i noterne til modul 6. I begge tilfælde kan man ved at forestille sig hvad der sker, hvis man bruger systemet igen og igen, komme frem til, at y går mod nul og x går mod nul, men at værdierne aldrig bliver negative. Jeg besluttede, at jeg under gennemgangen af denne opgave ville pointere, at man derfor som konvention vælger at tage punktet $(0,0)$ med i tabellen.

Delspørgsmål to[88] er en aftagende potens-sammenhæng. Her kan man se, at ingen af de to variable kan blive negative, og når den ene er stor, er den anden lille, hvilket giver den tredje karakteristiske graf på side [130] i noterne. Delspørgsmål 4,5,6 og 7[89] behandler henholdsvis aftagende og voksende eksponentielle og logaritmiske sammenhænge, svarende til de sidste 4 karakteristiske former af graferne. Da omvendte sammenhænge ikke var en del af pensum, valgte jeg at undlade at stille opgaver derom, men nøjedes med at tage omvendte sammenhænge op i forbindelse med gennemgang af opgave 6.6[88-89]. På side [134] i noterne til modul 6 har jeg lavet en komplet oversigt over hvordan de syv karakteristiske typer af sammenhænge og deres omvendte sammenhænge er forbundet.

5.11.8 Den første aflevering (aflevering 15)

Den første aflevering [90-92] hørende til forløbet blev stillet efter modul 6 og skulle derfor kunne løses med de redskaber eleverne havde til rådighed på dette tidspunkt, hvor ligninger altså ikke var introduceret endnu.

Jeg har tidligere beskrevet hvordan modelleringsaspektet i dette speciale er nedprioriteret, men for at vise hvordan man kan lave meningsfulde modelleringsopgaver udelukkende ved brug af det numeriske og grafiske register, valgte jeg, at den ene aflevering skulle være en anvendelse af potens-sammenhænge, og at den anden aflevering skulle være en anvendelse af eksponentielle sammenhænge.

Ved at referere til en situation i det virkelige liv inddrages der - udover den numeriske og grafiske dimension - den komparative dimension af ændringer, som blev nævnt i afsnit 3.10. Jeg skulle finde en situation i det virkelige liv, hvor eleverne havde nemt ved at forholde sig til ændringerne af de to variable, og som samtidig kunne beskrives af en simpel potenssammenhæng, og valget faldt på bremselængdens afhængighed af hastigheden, som er en kvadratisk sammenhæng. På internetadressen http://www.doctordriver.dk/05ddnew/play/brems/brems.html fandt jeg et interaktivt program kaldet *doctordriver*, hvor man med en bjælke kunne vælge en hastighed, hvorefter en bremselængde blev udregnet.

Idéen med afleveringen var, at man ved at vælge tre passende værdier af hastigheden kunne få tre tilhørende bremslængder, hvilket ville resultere i en tabel med tre punkter. Teknikkerne med at udvide en tabel og tegne grafer skulle bruges til at opstille en model på baggrund af disse tre punkter. Doctordriver kan til en vis grad bruges til at kontrollere modellens forudsigelser, men bemærk at hastigheden ikke kan komme over 130 kilometer i timen i programmet.

Delspørgsmål 1[90] handler om at finde tre punkter, der kan bruges som udgangspunkt i tabellen. Spørgsmål 2,4 og 5[90-91] handler om at finde ækvivalente systemer ved hjælp af aflæsninger i doctordriver. Den hemmelige dagsorden er, at eleverne skal vende sig til den lidt utilgængelige tolkning af koefficienten *a* i ligningen for en potenssammenhæng, da der er tale om en kvadratisk sammenhæng er kvadratet på den multiplikative ændring for *x* jo lig med den multiplikative ændring for *y*.

Spørgsmål 6 og 8[91] handler om at udvide tabellen i hånden og fortolke resultatet med naturligt sprog, og spørgsmål 9[92] handler om at konstruere grafen hørende til tabellen. Opgave 10[92] tog jeg med, fordi jeg ville inddrage symmetri af de to variable: Her afhænger *x* af *y*. Endelig ville jeg have et spørgsmål med en hastighed der var større end 130 kilometer i timen og som ikke umiddelbart fremkom af tabellen ved regelmæssige gentagelser af de eksisterende system, men som kunne løses ved at udvide grafen eller ved at bruge den viden om forbindelsen mellem de multiplikative ændringer for x og y, der kom frem i spørgsmål 2, 4 og 5. Dette forklarer hvorfor bremselængden 360 meter blev valgt i spørgsmål 12[92]: Tallet 360 er resultatet af en hastighed, der er større end 130 kilometer i timen, og der er flere kvadrattal der går op 360.

5.11.9 Modul 7: Ligningen for en eksponentiel sammenhæng.

Tiden var kommet til at inddrage det symbolske register, og jeg valgte at starte med eksponentielle sammenhænge, fordi tolkningen af koefficienten *a* her er nem at forstå med den valgte covarians-tilgang: *a er den multiplikative ændring for y, der svarer til en additiv ændring af x på 1*. På denne måde kan man nemt koordinere ændringer i det numeriske og symbolske register for en eksponentiel sammenhæng. I noterne til modul 7 inddrages desuden ændringer i det grafiske register, hvor *a* identificeres med hvor mange gange en givet søjle bliver større end forgængeren, når afstanden mellem søjlerne er 1. Koefficienten *b* har ikke samme dynamiske rolle som koefficienten *a*, idet den har forbindelse til et enkelt skæringspunkt.

Opgaverne i modul 7[93-96] skulle handle om konversion fra tabel til ligning og fra graf til ligning for eksponentielle sammenhænge, men jeg besluttede mig for ikke at opstille generelle formler endnu. Eleverne ville blive bedre til at koordinere ændringer i de tre registre, hvis vi i første omgang udelukkende lavede konversioner ved hjælp af ovenstående tolkning af koefficienterne, end hvis man opskrev den generelle formel til at starte med. Derfor er tabellerne i opgave 7.1[94] meget simple, i nogle af opgaverne er den additive enhed for *x* allerede *1* fra starten af og i resten af opgaverne skal man først interpolere i tabellerne for at finde den multiplikative enhed for *y*, der svarer til en additiv enhed for *x* på *1*. For at repetere hvordan man finder typen af en givet tabel eller graf er ikke alle tabeller og graferne i opgaverne til modul 7 eksponentielle sammenhænge. Opgave 7.2[95-96] går simpelt hen ud på at først identificere de af graferne, der er eksponentielle sammenhænge, og derefter finde deres ligninger.

5.11.10 Modul nummer 8 og 9: Tabel til ligning

Modul nummer 8 og 9 lå i forlængelse af hinanden og bliver derfor behandlet samlet. Højdepunktet er formlerne for hvordan man kommer fra tabel til ligning for de tre nye typer af sammenhænge, men før disse skulle gennemgås valgte jeg at give en mere intuitiv introduktion til ligningen for en potens-sammenhæng, som på samme måde som i modul 7 var baseret på tolkning af koefficienter og koordination af ændringer i de tre registre.

Koefficienten *b* er nem at fortolke i det grafiske og numeriske register for en potenssammenhæng, men koefficienten *a* er ikke så ligetil. Jeg valgte at tage forskud på den sætning jeg ville vise senere og skrev på side [139] i noterne til modul 8 og 9:
Koefficienten a er den potens, som den multiplikative ændring af x skal opløftes i for at man får den multiplikative ændring af y.
Opgave 8.1[98] handler om at bruge ovenstående tolkning af koefficienterne til at finde ligningen for forskellige simple potenssammenhænge, men for at repetere indgår også enkelte lineære og eksponentielle sammenhænge.

Opgave 8.2[99] har til formål at koordinere det grafiske og symbolske register for eksponentielle og potens-sammenhænge. Opgaven er lavet sådan, at kendskab til koefficienten *b*´s grafiske fortolkning er tilstrækkeligt til at løse opgaven, hvis man ellers kan kende forskel på typerne af sammenhæng ved hjælp af de tre grafer og ligninger.

Siderne [142-151] i noterne til modul 8 og 9 samt opgaverne 3, 4, 5, 6 og 7[100-102] til samme modul handler om konversionene fra tabel til ligning for eksponentielle, potens- og logaritmiske sammenhænge. Jeg valgte, at medtage to sætninger til både eksponentielle og potens-sammenhænge. De givne oplysninger i den ene sætning er et punkt (som umiddelbart fastlægger koefficienten *b*) og et system, som kan bruges til at beregne *a*, mens den anden sætning er mere generel, idet de givne oplysninger her er to arbitrære punkter – det er denne form for sætning, der indgår i de traditionelle lærebøger. I sætning 1 i noterne [142] og sætning 3 i noterne[148] opsummeres diskussion af forbindelsen mellem de additive/ multiplikative ændringer for x og y samt koefficienten a ved at der angives formler, der præcist angiver sammenhængen mellem ændringerne for x og y samt koefficienten a.

I sætning 3 på side [148] indgår 10-tals logaritmen og i beviset for samme sætning skal 10-talslogaritmen bruges til at isolere eksponenten i en ligning. Derfor blev jeg nødt til på de foregående sider [146-147] at introducere 10-talslogaritmen, en regneregel og dens anvendelse til at isolere eksponenter. Heldigvis er dette nemt med den valgte covarianstilgang, da 10-talslogaritmen er den logaritmiske sammenhæng, hvis tabel indeholder punkterne $(1,0)$ og $(10,1)$. Opgave 8.4, 8.5 og 8.6[101] handler om 10-talslogaritmen, opgave 8.3[100] handler om konversion fra tabel til ligning for eksponentielle sammenhænge og opgave 8.7[102] handler om konversionen fra tabel til ligning for potens-sammenhænge.

Til slut skal det nævnes, at formlen for en logaritmisk sammenhæng, som angives på side [151], bevises ved brug af viden om omvendte sammenhænge og symmetri af ligninger. Jeg har simpelt hen isoleret x i ligningen for en eksponentiel sammenhæng og har derefter ombyttet x og y overalt. Koefficienterne beregnes derfor stort set på samme måde som for eksponentielle sammenhænge.

5.11.11 Modul nummer 10

Som nævnt i afsnit 5.10 viste det sig efter modul 8 og 9, at der var nødvendigt at bruge mere tid på at arbejde md ligninger. Jeg lavede ingen ekstra opgaver, men jeg valgte at lave nogle ekstra noter[152-157], hvor et eksempel til hver af de fem vigtigste sætninger fra modul 8 og 9 blev gennemgået. Læg især mærke til tabellerne nederst side [153] og [154], hvor der angives tre ækvivalente systemer til den samme tabel, og betingelserne for hvornår to systemer er ækvivalente diskuteres.

5.11.12 Modul nummer 11: Formler for halveringstid og fordoblingstid

Formlerne for halveringstid og fordoblingstid har samme udseende i mine noter[158] som i den traditionelle undervisning, men bemærk, at beviserne følger nemt af de den formel, der relaterer koefficienten a til den additive ændring for x og den multiplikative ændring for y.

Både i eksemplerne i noterne og i opgaverne til modul 11[103-106] har jeg lagt vægt på at bruge mindst to registre. De eksakte beregninger foregår selvfølgelig i det symbolske register, mens et af de to andre registre bruges til kontrol. På denne måde bliver formlerne ikke bare noget, der spytter et tilfældigt tal ud, men derimod et redskab til at forbedre præcisionen af de metoder der tidligere er lært om halveringstid og fordoblingstid.

I opgave 11.1 og 11.2[104-105] foretages kontrollen med grafer og i opgave 11.3 og 11.4[106] foretages kontrollen med tabeller. Det skal bemærkes, at tabellerne kun kan kontrollere om halveringstiderne og fordoblingstiderne har den rigtige *størrelsesorden*.

5.11.13 Den anden aflevering (aflevering nummer 16)

Den anden aflevering i forløbet skulle behandle stoffet fra modul 7 til 11, sådan at eleverne havde erfaring med alle dele af pensum inden prøven. Jeg valgte at dække dette stof ind ved at lave en opgave om halveringstid og fordoblingstid (opgave 1[108]), en opgave om tolkning af koefficienterne i ligningen for eksponentielle og potens-sammenhænge (opgave 2[109]), en opgave om konversion fra tabel til ligning (opgave 3[110-111]).

Jeg valgte at inddrage en modelleringsopgave om eksponentielle sammenhænge til sidst (opgave 4[111-112]). Formålet med opgaven er at undersøge hvordan eleverne efter det covarians-baserede forløb ville vælge at gribe en modelleringsopgave an, når valget af register er frit. Jeg har lavet spørgsmålene sådan, at de i princippet kan løses ved hjælp af det numeriske register alene, men da man i så fald skal anvende det samme system 50 gange i spørgsmål b og omkring 33 gange i spørgsmål c, er det hensigtsmæssigt at bruge Excel eller en ligning her. Hvis man vælger at bruge en ligning, kan spørgsmål d løses ved fortolkning af koefficienten *b*.

5.11.14 Den afsluttende prøve i forløbet.

Jeg bestemte at der i overensstemmelse med den tilsigtede viden (jævnfør afsnit 5.4) skulle være tre hovedtyper af opgaver:

1. Bestem typen af variabelsammenhæng (både tabel, graf og ligning).
2. Koordination mellem de tre registre.
3. ”Rene” konversioner, det vil sige uden valgmuligheder.

En smart måde at slå opgavetype 1 og 2 sammen på er, at man først skal bestemme typen for et antal variabelsammenhænge i alle tre registre, og at man derefter skal finde ud af hvilke tabeller, grafer og ligninger, der passer sammen. Dette udgør del A af prøven (Det skal bemærkes, at alle elever skulle løse både del A og del B af prøven).

Krav til Opgave A1-A3[164-167] (bestem typen)

- Logaritmiske sammenhænge skal ikke indgå, da det ikke er kernestof, og da der ikke skulle gås i detaljer med ligningen for en logaritmisk sammenhæng.

- Eksponentielle, lineære og potens-sammenhænge skal indgå i alle tre registre. Der skal være to af hver type af sammenhæng, dvs. der er i alt 6 variabelsamenhænge på spil.
- Det skal være de samme variabelsammenhænge i opgave A1-A3, men det skal ikke fremgå af opgaveteksten. Først i opgave A4 om koordination, skal der stå, at det er de samme sammenhænge.
- I alle grafer, skal akserne være skaleret ens, og i alle tabellerne skal de indgående x-værdier ligge i det samme interval. Årsagen er, at man nemt skal kunne sammenligne graferne og tabellerne.
- For hver type af sammenhæng skal der være en aftagende og en voksende sammenhæng.

<u>A1[164] tabeller</u>

- Nogle af tabellerne skal være sådan, at det er meget nemt at gennemskue systemet, og nogle af tabellerne skal være sådan, at det kræver lidt arbejde at gennemskue systemet.
- Nogle af tabellerne skal indholde x-værdien nul andre skal ikke. Nogle af tabellerne skal have den samme y-værdi hørende til x lig med nul.

<u>A2[165-166] grafer</u>

- Alle 6 grafer skal være tegnet i det samme x-y-vindue
- Det skal være tydeligt at nogle af graferne skærer y-aksen, men der skal også være et par grafer, hvor det ikke er klart om y-aksen skæres eller hvor den skæres.
- Potens og eksponentielle sammenhænge skal ligne hinanden meget, så man bliver nødt til at aflæse nogle punkter for at finde forskellen

<u>A3[167] ligninger</u>

- y skal være isoleret i alle ligningerne, det ville gøre koordinationsopgaven unødvendigt vanskelige, hvis ligningerne ikke var på standardformen.

<u>Krav til Opgave A4[168] koordination</u>

- Der skal være flere måder at løse opgaven på, sådan at alle elever har en chance for at løse opgaven. Enten kan man bare sætte tal ind i alle ligninger, og aflæse de tilsvarende punkter i tabeller og på grafer. Ellers kan man argumentere ved hjælp af monotoniforhold.

Del B[169-174] af prøven består stort set af rene konversioner. Der optræder 5 slags konversioner, idet konversionen fra graf til tabel er udeladt på grund af klassens gode resultater i den diagnostiske test. Dog skal der i flere tilfælde foretages operationer, før man kan lave en konversion. Desværre er det for omfattende at medtage alle slags konversioner mellem alle typer, så igen nedprioriteres de logaritmiske sammenhænge og der fokuseres på eksponentielle og potens-sammenhænge. Her følger kommentarer til udvalgte opgaver:

<u>B4 Ligning til tabel (ækvivalente ligninger) [171]</u>

- y skal ikke være isoleret i ligningen, så man skal lave en operation først og derefter en konversion.

<u>Generelt om tabel til ligning:</u>

- Der skal kun indgå potens- og eksponentielle sammenhænge
- I de fleste opgaver skal a og b nemt kunne beregnes ud fra tabellen ved hjælp af information om et punkt og et system. Jeg har valgt at gøre det sådan, fordi flere elever i så fald vil være i stand til at besvare opgaven.
- I enkelte opgaver skal a og b være svære at beregne uden formlen, hvor to punkter bruges til at bestemme ligningen. Dette gøres for at undersøge om eleverne kan bruge denne formel.

6 A posteriori analyse

Under forløbets afvikling var der 25 elever i klassen. Det samlede datamateriale består af:

- 9 af elevernes besvarelser til opgaverne i modul 1, som blev indleveret frivilligt og anonymt (se bilag 1)
- 14 besvarelser af den første aflevering (se bilag 2)
- 13 besvarelser af den anden aflevering (se bilag 3)
- 23 besvarelser af testen i modul 4 (se bilag 4)
- 25 besvarelser af den afsluttende prøve (se bilag 5)

Det lave antal besvarelser af afleveringerne skyldes, at jeg kun har medtaget rettidigt indleverede afleveringer i mit datamateriale.

Introduktion til dataanalyse.

I data-analysen vil hovedvægten blive lagt på testen i modul 4 og den afsluttende prøve, da man her får et realistisk billede af, hvad den enkelte elev kan, og da næsten alle elever deltog her. Jeg vil også kort analysere elevernes besvarelser af den ene af de to modelleringsopgaver i afleveringerne, og endelig vil jeg se på et par af elevernes besvarelser til opgaverne i modul 1 om symmetri.

Da mængden af data er meget stor, har det været nødvendigt at udvælge, hvad der skal gennemgås i detaljer. Jeg har valgt at gøre det sådan, at data-analysen kører efter samme rækkefølge som afsnittet om tilsigtet viden, hvor jeg til hvert punkt udvælger passende eksempler fra elevernes besvarelser og angiver hvor mange procent af eleverne, der kunne svare på de givne opgavetyper.

6.1 Symmetri og operationer, som bevarer det matematiske objekt

To ting skal bemærkes før jeg tager fat på elevernes besvarelser til opgaverne i modul nummer 1. Det var under halvdelen af eleverne, der indleverede deres løsninger, og eleverne havde haft mulighed for at ændre på deres løsninger under opgavegennemgangen. Derfor giver det ikke mening at udregne hvor mange procent af eleverne, der kunne regne opgaverne, så jeg vil nøjes med nogle overordnede observationer eller et par eksempler, når disse opgaver tages op.

I opgave 1.2 a), hvor ligningen for en ret linje i et koordinatsystem med lodret x-akse skulle bestemmes, startede næsten alle elever med at skrive $y = ax + b$, og korrigerede derefter ligningen, så den passede til den nye situation. Her er et eksempel, hvor denne korrektion skete på systematisk, men ukorrekt vis (se eventuelt Bilag 1):

$y = ax + b$

hældning

skæringspunkt i y-aksen

$X = 2x + 2$

Da denne ligning også opskrives under sammenligningen i spørgsmål d) er det ikke bare en skrivefejl, at der står *x* på venstresiden af ligningen. Eleven har sandsynligvis først fundet ligningen $y = 2x + 2$, men har så ændret *y*´et på venstresiden til et *x*, fordi *x*-aksen var den lodrette akse. Dette er et eksempel på den fejltype, der blev nævnt i afsnit 3.6.1 om elevernes misforståelser af variable, hvor den samme variabel benyttes til at beskrive to forskellige størrelse.

Det næste eksempel viser en mere vellykket korrektion af ligningen $y = ax + b$ (se eventuelt Bilag 1):

$y = ax + b$

hældning

skæringspunkt med y

$x = 2y + 2$

Man kan tydeligt se, at der først blev skrevet $y = 2x + 2$ og derefter blev x og y byttet om. Dette er den hyppigst benyttede metode, det næste eksempel indeholder en lille forklaring på metoden (se eventuelt bilag 1):

$$y = ax + b \Rightarrow x = ya + b$$

Denne ukorrekte implikation bringer mig videre til det næste punkt om ækvivalens af ligninger. De fleste elever lærte hurtigt at bruge koordinatsystemer, hvor *x* var den lodrette akse og ligninger hvor *x* var isoleret, ved hjælp af analogi: *Man skal bare gøre som man plejer, dog skal der byttes om på y og x*. Hele 75% af eleverne kunne til testen en uge inde i forløbet finde den korrekte ligning i opgave 5[77], hvor *y* ikke havde den sædvanlige hovedrolle. Her er et eksempel på en korrekt besvarelse af denne opgave (af elev K), hvor koefficienternes tolkning også oversættes til at omhandle den anden variabel end sædvanligt (se eventuelt bilag 4.K):

$$X = y + 3$$

Den skærer x-aksen på +3 og har en hældning på +1 (altså y)

Men de fleste af eleverne opfattede ligningerne, hvor *x* var isoleret som repræsentationer for nogle andre matematiske objekter end dem som repræsenteres af ligninger hvor *y* var isoleret! Jeg baserer denne påstand på 2 ting: For det første var der ingen af de elever, som kom frem til ligningen hvor *x* var isoleret i opgave 1.2 a) og en ligning hvor *y* var isoleret i opgave 1.2 b), der under sammenligningen i spørgsmål d) skrev, at de to ligninger var ækvivalente. For det andet var der kun 17% af eleverne som i opgave 4 i testen angav begge de (ækvivalente) ligninger som hører til den givne graf. Her følger løsningen af denne opgave fra en af de få elever, som løste den korrekt (Se bilag 4.I):

Ligning 1 $\quad y + 8 = 4x \quad y = 4x - 8$

Ligning 2 $\quad y = 4x + 8$ ✓

Ligning 3 $\quad 12x = 3y - 24 \quad 3y = -12x - 24 \quad y = \frac{-12}{-3} - \frac{24}{-3}$

$$y = 4x + 8$$

Hvilke(n) af de tre ligninger passer til følgende graf?

og senere...:

Skriv svaret her med en kort forklaring:

Når y isoleres er både ligning 2 og 3 den "rigtige" ligning.

Denne formulering med ”den rigtige ligning” tyder på at eleven har en objekt-opfattelse af ligninger (jævnfør afsnit 3.6.1), men det kan ikke udelukkes, at hun bare gentager, hvad læreren har sagt uden at forstå hvorfor to ækvivalente ligninger giver den samme variabelsammenhæng.

Den eneste opgave til den afsluttende prøve, som direkte behandlede ækvivalens af ligninger var opgave B4[171], hvor en tabel skulle udfyldes ved hjælp af ligningen $x^2 = \frac{12}{y}$. Hele 40% af eleverne svarede blankt, 24 % forsøgte at isolere y, men uden succes, og de resterende 36% besvarede opgaven korrekt. Udover at fortælle noget om den operationelle opfattelse af ligninger for de 40% fortæller dette resultat også hvor store problemer eleverne i klassen havde med simple operationer i det symbolske register.

Jeg kan konkludere, at en stor del af eleverne – selv efter forløbets afslutning - havde en operationel opfattelse af ligninger, hvor lighedstegnet er et ”do-something-symbol,” og ikke et ækvivalens-symbol (jævnfør afsnit 3.6.1): De fleste elever opfatter ligningerne som en opskrift på at komme fra input til output – eventuelt i forbindelse med grafer, hvor 1. aksen er input og 2. aksen er output – men ikke som matematiske objekter med flere repræsentationer.

Her er de fire potentielle misforståelser, som jeg brugte til designet af opgaverne til modul 1 (jævnfør afsnit 5.11.1):

1. Hældningskoeficienten for en ret linje afhænger kun af hvor stejl linjen er på papiret (svarende til linjens vinkel med x-aksen)
2. y-aksen skal altid være den lodrette akse
3. I ligningen for en variabelsammenhæng skal y være isoleret

4. To forskellige ligninger vil altid have to forskellige grafer

Jeg har indtil nu redegjort for, at misforståelse nummer 2 og 3 hurtigt blev udryddet hos de fleste elever, men at misforståelse nummer fire ikke var så nem at slippe af med. Nu vil jeg se på den første af misforståelserne om skalering, som blev behandlet i opgave 1.1. Som forventet faldt mange elever i fælden og svarede, at linje 1 har den største hældning. Dette svar fra en eleverne fortæller meget om hvordan eleverne med Duvals ord brugte *vision* (de umiddelbare visuelle indtryk) til at besvare opgaven og ikke *visualisering*, hvor alle de relevante detaljer i det grafiske register blev benyttet (jævnfør afsnit 2.1.1):

Nr. 1
Kig på den!!

Se eventuelt bilag 1. Denne elev opdagede ikke, at det faktisk var linje nummer 3, der var øverst, når linjerne skulle indtegnes i det samme koordinatsystem i spørgsmål b) og min opfattelse er generelt, at opgaven ikke i første omgang havde den ønskede ”selv-helende effekt”, hvor konflikten mellem spørgsmål a) og b) tvang eleven til tænke på skaleringen. Her er et eksempel på en elev, som tydeligvis er faldet i fælden, idet hun stort set ordret har formuleret misforståelsen ved siden af graf 1 (Bilag 1):

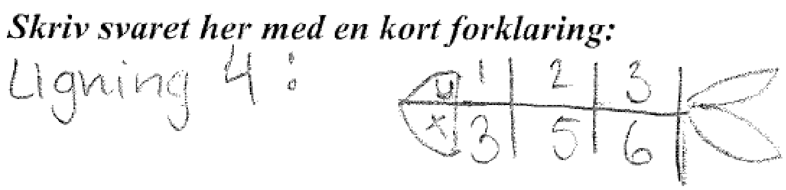
Denne Graf har den
største koefficient
jo større hældnings koefficient
jo større hældning

Ved siden af graf 3 har eleven skrevet:

hvis man ser på
disse variabler
hælder denne mest

Det interessante er, at eleven har opdaget, at der er et problem, men endnu ikke helt har opgivet det oprindelige svar (siden det ikke er visket ud). Derfor er der noget der tyder på, at selv efter gennemgang af opgaverne til modul 1 var der enkelte elever, som ikke definitivt havde gjort op med misforståelse 1 ovenfor om skalering.

Indtil nu har jeg i dette afsnit behandlet symmetri og operationer, som bevarer det matematiske objekt, i det grafiske og symbolske register. Til slut vil jeg nævne at på samme måde som eleverne hurtigt lærte at arbejde med grafer med en lodret *x*-akse lærte eleverne hurtigt, at denne ombytning af akserne svarer til en ombytning af de to koordinater til ethvert punkt. Her er et eksempel på et sildeben fra opgave 5[77] i testen, hvor *x*-aksen er lodret (Elev U), og hvor *y* derfor er øverst i tabellen:



6.2 Covariation: Additive og multiplikative ændringer i det numeriske register

Dette afsnit tager fat på den del af dataanalysen der hører til det tredje punkt i den tilsigtede viden: Udførelse og genkendelse af additive og multiplikative ændringer i det numeriske register og genkendelse af type i alle tre registre.

Eleverne blev meget hurtigt fortrolige med additive og multiplikative ændringer i *regelmæssige* tabeller og med at bestemme typen i *regelmæssige* tabeller. Samtlige elever bestemte typen korrekt i opgaverne 1.a til 1.d i testen (modul 4[73]), hvor tabellerne var regelmæssige, de additive ændringer var positive og de multiplikative ændringer større end *1*. I spørgsmålene 1.e og 1.f i testen og spørgsmålene A1.1 og A1.2 i prøven forekom der negative additive ændringer og multiplikative ændringer mindre end *1*, hvilket åbenbart gav anledning til en anelse forvirring. Se skemaet til højre, hvoraf succesraten i opgaver, hvor typen skulle bestemmes, fremgår. Eleverne havde sværest ved at bestemme typen af sammenhæng i de *uregelmæssige* tabeller.

Bestemmelse af type vha. tabel		
Opg.	*Procentdel korrekte*	*Beskrivelse af opgaven*
1.a	100	Regelmæssige tabeller, positive add. ændring og multpl. ændring større end 1
1.b	100	
1.c	100	
1.d	100	
1.e	96	Regelmæssige tabeller, negative add. ændring eller multpl. ændring mindre end 1
1.f	83	
A1.1	82	
A1.2	94	
A1.3	74	Uregelmæssige tabeller
A1.4	92	
A1.5	86	
A1.6	60	

Det næste skema viser succesraten i de opgaver, hvor tabeller skulle udvides. De meget lave scorer i opgaverne med de uregelmæssige tabeller kan muligvis forklares med, at hovedparten af klassen ikke opdagede, at man skulle anvende enhederne ikke én, men to gange! Dette kan forklares med, at langt de fleste elever i starten af forløbet tog den anvendte notation, hvor systemet noteres til højre i tabellen, helt bogstaveligt: Systemet fortæller jo hvad man skal gøre, når tabellen skal udvides.

Udvidelse af tabel		
Opg	*Procent korrekte*	*Beskrivelse af opgaven*
2.a	13	Uregelmæssig
2.b	88	Regelmæssig
2.c	88	Regelmæssig
2.d	67	Regelmæssig
2.e	100	Regelmæssig
2.f	33	Uregelmæssig
2.g	100	Lin. interpolation

Eleverne blev med tiden bedre til at lave simple udvidelser af tabeller. I aflevering nummer 15[90-92] (Doctordriver) svarede samtlige 14 elever korrekt på spørgsmål 1,2 og 6, hvor *y*-værdierne til en tabel først skulle findes ved hjælp af Doctordriver, et system derefter skulle bestemmes og skulle bruges til at udvide tabellen. Men i spørgsmål 11, hvor en tabel skulle udfyldes til den samme variabelsammenhæng – blot med andre startværdier og et andet system – svarede kun 56% af eleverne korrekt. Helt galt gik det i spørgsmål 12, hvor kun 21% af eleverne svarede korrekt og de fleste svarede blankt. Opgaven går kort sagt ud på, at man ved hjælp af Doctordriver har adgang til alle tabelværdier for *x* under *130*, man kender et system (faktisk flere) og skal bestemme den *x*-værdi, der hører til y-værdien *360*. For at løse opgaven eksakt skal man løsrive sig fra alle de tabeller, der hidtil har medvirket i opgavesættet, og selv udvælge en tilstrækkelig lav *y*-værdi, som med et af de givne systemer kan "ramme" tabelværdien $y = 360$.

Her er en af de få korrekte løsninger af elev D (Bilag 2.D):

Vores system siger at y skal ganges med 4 og x ganges med 2.

Derfor: 360 : 4 = 90

(aflæst doctordriver) Man skal køre med 126,5 km/t for at få en bremse-længde på 90 m.

126,5km skal ganges med 2 for at systemet følges

altså; 126,5km · 2 = 253km.

NL 23. Marts 2007

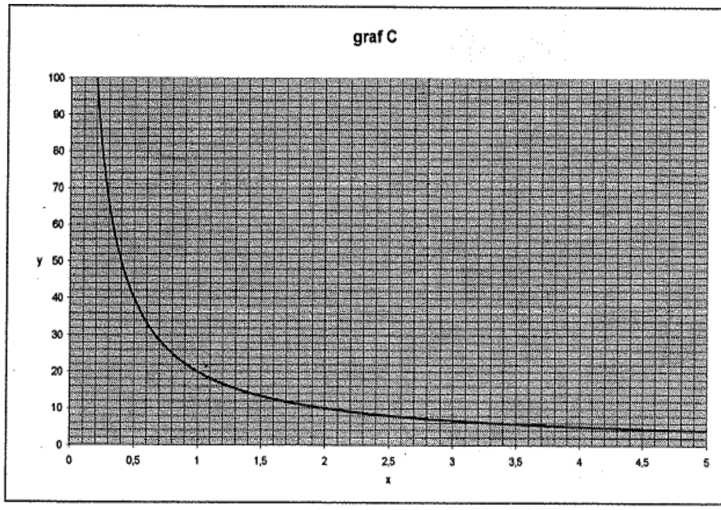
Svar: Man skal køre 253 km/t for at få en bremse længde på 90 m

Alternativt kan man med interpolation bruge de eksisterende tabeller og systemer til at komme frem til en approksimativ løsning, men det var der ingen der forsøgte. Konklusionen er, at selv om de fleste elever lærte at udvide tabeller med givne systemer, var der mange elever, som aldrig lærte at bruge udvidelse af tabeller på fleksibel vis til opgaveløsning.

Bestemmelse af type ved hjælp af graf:

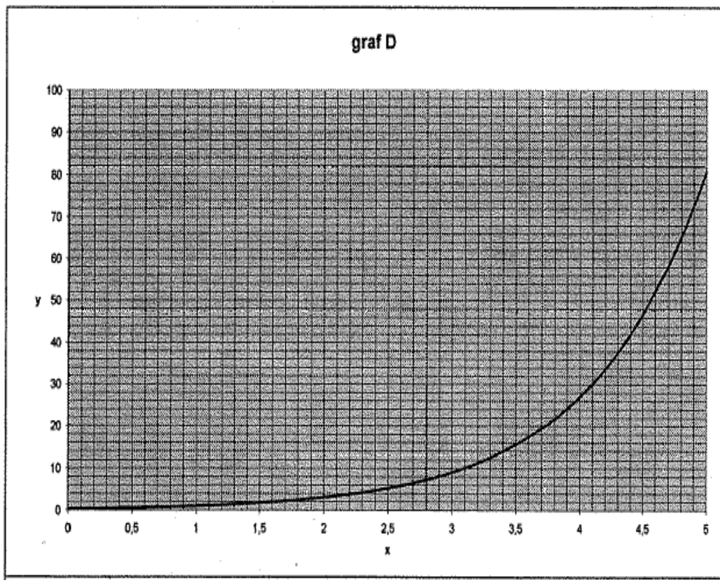
Skemaet til højre viser hvordan det gik med at bestemme typen af sammenhænge ved hjælp af grafer til den afsluttende prøve. Opgave D og F[166] skiller sig klart ud, og det skyldes, at de to grafer ligner hinanden meget. Der blev generelt anvendt følgende to metoder: Den første er en punktvis metode, hvor tre passende punkter udtages og et system bestemmes. Den anden er en "global" metode, hvor typerne bestemmes ved hjælp af globale kendetegn som for eksempel form af kurven og tilstedeværelsen af skæringspunkterne med akserne. Den globale metode er selvsagt den nemmeste for de lineære sammenhænge, men også den aftagende eksponentielle sammenhæng (graf B) er nem at behandle korrekt med den globale metode, da eksponentielle sammenhænge er de eneste af de ikke-lineære sammenhænge, som kan skære *y*-aksen i et punkt forskelligt fra nul. Dette forklarer, elevernes succes i opgaverne A, B og E. De 8 (ud af 25) elever, som udelukkende brugte den globale metode til at besvare opgave A2 kom i store problemer i delspørgsmålene C, D og F, her er et typisk eksempel (Elev D), Bilag 5.D:

Opg	**Procent rigtige**	**Type**
A2.A	92	Voksende lin.
A2.B	92	Aftagende eksp.
A2.C	80	Aftagende pot.
A2.D	52	Voksende eksp.
A2.E	84	Aftagende lin.
A2.F	52	Voksende pot.



Type: potens

Forklaring: fordi potens-sammenhænge enten skærer grafen i ingen af aksetne eller skærer den begge akser i samme punkt (0,0) Denne graf skærer ingen af akserne.



Type: potens

Forklaring:

Grafen skærer begge akser i samme punkt / nemlig (0,0) Grafen er desuden voksende

I begge delspørgsmål refererer eleven til noterne (modul 6, side 5-6) og føler sig på sikker grund, men på grund af at grafen kun viser den partielle information (jævnfør afsnit 3.4.2) er hendes argumentation forkert i spørgsmål C, og på grund af den grafens begrænsede præcision (jævnfør afsnit 3.4.2) er både argumentationen og svaret forkert i spørgsmål D. Det kan nemlig ikke umiddelbart udelukkes at *den matematiske graf* hørende til graf C skærer akserne eller at *den matematiske graf hørende til graf D* skærer *y*-aksen i en *y*-værdi, som er forskellig fra nul. Man kan sige, at den viste form for misforståelse blev grundlagt af mig selv, da jeg lavede noterne. Eleverne bruger graferne fra noterne som ”prototyper” (jævnfør afsnit 3.7) på hver type af sammenhæng og bestemmer typen af sammenhænge ved at sammenligne globale karakteristika med disse grafer. Jeg bruger ordet prototype på en lidt anden måde end i afsnit 3.7, hvor prototyperne blev brugt til at afgøre om en givet graf eller ligning var en funktion, men i vores tilfælde bruges prototyperne altså bare til at bestemme *typen* af sammenhæng i stedet.

I afsnit 2.2 skrev jeg, at det kan være til ulempe for eleverne, hvis et matematisk begreb identificeres med en enkelt objektpræget repræsentation, fordi det objekt, som eleven ”ser” er er en ufuldstændig version af det ”rigtige” objekt. Denne problemstilling er relevant her, fordi de konkrete grafer er ufuldstændige versioner af de matematiske grafer, og visse elevers tendens til at opfatter graferne som ikoniske repræsentationer (som omtalt i afsnit 2.1.1) giver udslag i denne ufuldstændige objektopfattelse.

Opg	Procent rigtige	Type
A3.I	80	Pot.
A3.II	80	Eksp.
A3.III	64	Lin.
A3.IV	68	Pot.
A3.V	64	Lin.
A3.VI	64	Eksp.

Selv om alle eleverne var meget gode til typebestemmelse ved hjælp af regelmæssige tabeller, betød det ikke, at de derfor altid ”udtog” en regelmæssig tabel fra graferne og bestemte typen derefter. Der er sandsynlivis to grunde til dette: For det første havde en del af eleverne svært ved at udtage et system fra en graf, man skal jo prøve sig lidt frem, da man ikke på forhånd ved om man skal bruge additive eller multiplikative ændringer. For det andet syntes de fleste elever, at den globale metode var mindre besværlig, her skulle man ikke bruge lang tid på diverse aflæsninger, som muligvis ikke var helt eksakte.

Elev L er et eksempel på en elev, som ikke kender den generelle metode til at bestemme typen ved hjælp af grafer. Hun benyttede udelukkende additive ændringer på 1 i alle opgaverne A2.A – A2.F og derfor lykkedes det at bestemme typerne af de lineære og eksponentielle sammenhænge, men ikke af potenssammenhængene (jævnfør bilag 5.L).

Bestemmelse af type ved hjælp af ligninger: Klassens store problemer med ligninger kan tydeligt ses i skemaet til højre, hvor resultaterne i opgave A3 til prøven er angivet. Det er bemærkelsesværdigt at kun to tredjedele af klassen kan genkende ligningen for en lineær sammenhæng. Den dårlige score for lineære sammenhænge skyldes sandsynligvis, at vi efter modul 1 ikke arbejdede med ligninger for lineære sammenhænge overhovedet, men det er alligevel tankevækkende, at eleverne glemmer deres viden om lineære sammenhænge så hurtigt.

6.3 Data-analyse: Konversioner

Skemaet til højre viser resultaterne af opgaverne om "rene" konversioner i testen.

Opg	*Procent score*	*Type af konversion*	*Type af samh.*
B1	48	Lign. – Tabel	Eksp.
B2	44	Lign. - Graf	Eksp.
B3	52	Tabel - Graf	Log.
B4	36	Lign. - Tabel	Pot.
B5	64	Tabel – Lign.	Eksp.
B6	40	Tabel – Lign.	Eksp.
B7	52	Tabel – Lign.	Pot.
B8	32	Tabel – Lign.	Pot.
B9	40	Graf – Lign.	Eksp.

6.3.1 Ligning til tabel (opgave B1)

Den hyppigste fejlkilde i opgave B1, hvor en tabel skal udfyldes ved hjælp af ligningen $y = 4^x$, er at beregne 4^0 til at være nul, hvilket 28% af eleverne gjorde. Det så således ud til, at stort set alle elever vidste hvordan denne type af konversion skulle udføres, men at de på grund af den eksponentielle notation regnede forkert. To elever har åbenbart slet ikke forstået den eksponentielle notation og udfyldte tabellen lineært, her er elev Y´s løsning (Bilag 5.Y):

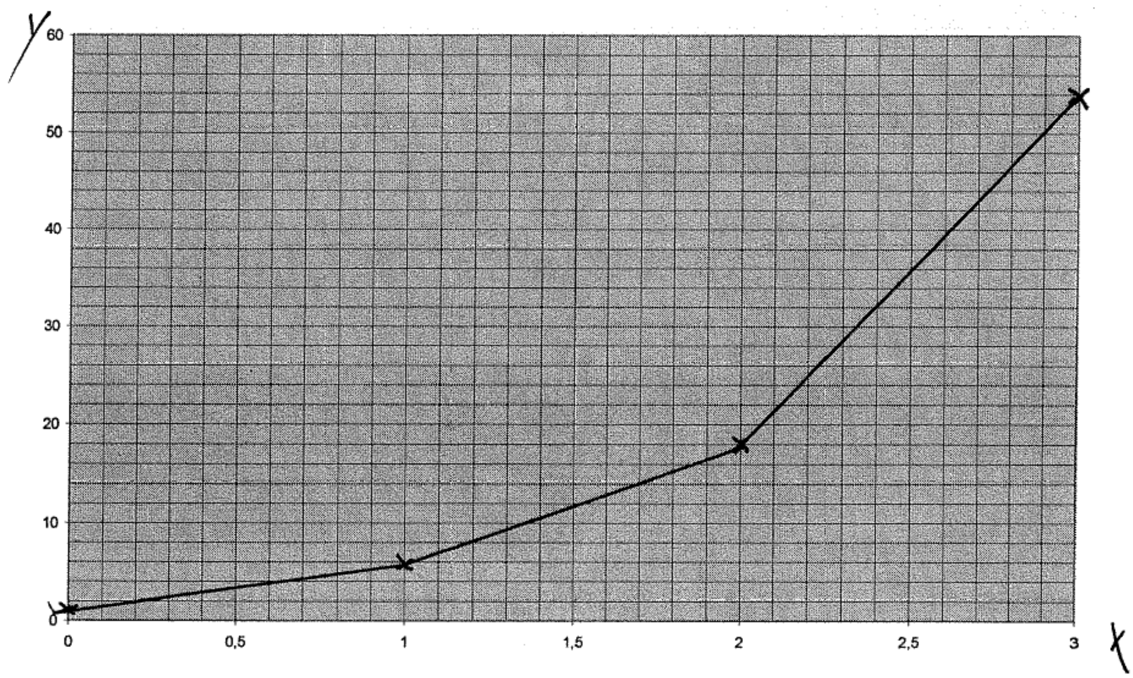
Opgave B1 (ca. 5%)

Udfyld tabellen ved hjælp af ligningen $y = 4^x$.

x	0	1	2	3
y	0	4	8	12

6.3.2 Ligning til graf (opgave B2)

Hele 20% af eleverne svarede slet ikke på denne simple opgave, hvor grafen for ligningen $y = 2 \cdot 3^x$ skulle tegnes. Forklaringen må være, at vi i forløbet udelukkende havde tegnet grafer ved hjælp af tabeller, så disse elever anede ikke hvad de skulle gøre. Det faldt dem åbenbart ikke ind at lave en tabel først. Derudover var der tre elever, der forbandt punkterne med rette linjer, se for eksempel elev X´s besvarelse (Bilag 5.X):



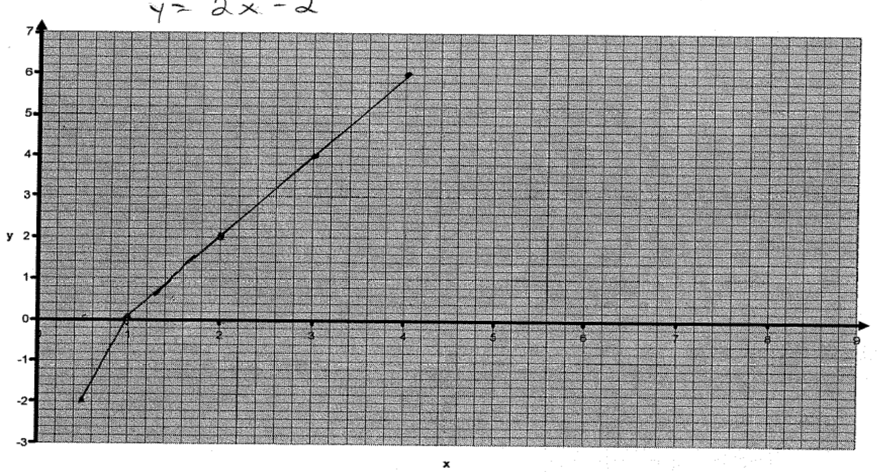
6.3.3 Tabel til graf (opgave B3)

Kun 52% kunne i opgave B3[171] tegne den korrekte graf i hele det angivne interval. Igen var der et par elever, der fandt de rigtige punkter, men forbandt dem med rette linjer, men den hyppigste fejl var at udvide tabellen lineært, hvilket 20 % af eleverne gjorde. Elev R skrev dette (Bilag 5.R):

x	0,5	1	2
y	-2	0	2

plus 0,5
plus 2 } linear

y = 2x - 2



6.3.4 Tabel til ligning (opgaverne B5-B8)

Der blev benyttet tre forskellige metoder til løsningen af opgaverne om konversion fra tabel til ligning [172-173]:

1. Ved hjælp af kendskab til fortolkning af koefficienter findes *a* og *b* (uden formler)

Denne metode er karakteriseret ved, at der ikke er tegn på brug af formler i elevens løsning, koefficienterne findes udelukkende ved hjælp af kendskab til koefficienternes fortolkning. Hvis ikke tabellen har en passende form til at starte med, kan den eventuelt udvides først. Her er Elev D´s løsning af opgave B5 (jævnfør bilag 5.D):

Opgave B5 (ca. 5%)
Find ligningen for den eksponentielle sammenhæng, der hører til følgende tabel:

x	0	1
y	7	35

$y = b \cdot a^x$

hvor $b = 7$ da ~~dett~~ er skæringen med y-aksen. $a = 5$ da y skal ganges med 5 når x adderes med 1.

altså ser ligningen sådan ud:

$\underline{y = 7 \cdot 5^x}$

2. Brug af formlen hvor et punkt og et system giver a og b

Denne metode er karakteriseret ved, at der er tydelige tegn på at der bruges formlerne fra noterne, hvor ligningen bestemmes ved hjælp af et punkt og et system. Her er elev F´s løsning, hvor der benyttes notationen *h* og *k* for systemet (jævnfør bilag 5.F):

x	0	1
y	7	35

$y = b \cdot a^x$

$\underline{y = 7 \cdot 5^x}$

b er y's værdi når x er 0

$a = k^{\frac{1}{h}} = 5^{\frac{1}{1}} = \underline{5}$

3. <u>Brug af formlen, hvor to punkter giver a og b</u>

Denne metode består i at bruge standardformlen, hvor en ligning bestemmes ved hjælp af kendskab til type og to punkter. Her vises Elev Q´s løsning (bilag 5.Q):

x	0	1
y	7	35

$y = b \cdot a^x$

$a = \left(\frac{y_2}{y_1}\right) \Rightarrow a = \left(\frac{35}{7}\right) \Rightarrow a = \underline{\underline{5}}$

$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} \Rightarrow b = \frac{7}{a^0} \Rightarrow b = \frac{7}{5^0} \Rightarrow \frac{7}{1} = b = \underline{\underline{7}}$

$\underline{\underline{y = 7 \cdot 5^x}}$

Følgende skema viser fordelingen af metoder i opgaverne B5-B8. Man kan her se, at de fleste elever undgik de generelle formler, hvor to punkter giver ligningen og foretrak i stedet at bruge formlerne, hvor et system og et punkt giver ligningen eller ikke at bruge en formel overhovedet. Dette forklarer hvor kun henholdsvis 40 % og 32 % kunne besvare opgaverne B6 og B8 korrekt, hvor der kræves noget arbejde for at få tabellerne på en form, så *a* og *b* kan bestemmes ved hjælp af metode 1 eller 2.

Metode (uanset korrekthed)	Opg B5	Opg B6	Opg B7	Opg B8
1. Fortolkning	32 %	4 %	40 %	0 %
2. Formel: Punkt og system	20 %	28 %	16 %	28 %
3. Formel: To punkter	16 %	24 %	8 %	20 %
anden metode	16 %	16 %	16 %	16 %
ingen (blank)	16 %	28 %	20 %	36 %

6.3.5 Graf til ligning (opgave B9)

Kun 40 % af eleverne fandt den korrekte ligning til den eksponentielt voksende graf i opgave B9[174], og hele 32 % af eleverne svarede blankt. Dette skal sammenlignes med opgave B5, hvor 64% af eleverne korrekt kunne finde ligningen til en tabel for en eksponentiel sammenhæng, hvor x-værdierne 0 og 1 indgår. Hvorfor laver eleverne ikke bare en sådan tabel først, og så bestemmer ligningen bagefter?

6.3.6 Konklusion om konversioner

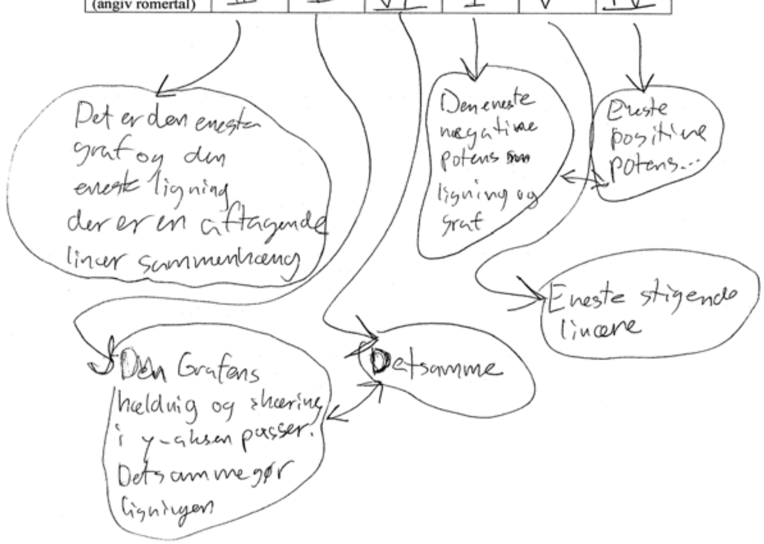
Da jeg i den afsluttende prøve ikke lavede spørgsmål om alle mulige konversioner for alle tre nye typer af sammenhænge, er denne data-analyse kun en stikprøve, som giver et fingerpeg om hvordan eleverne arbejdede med konversioner i slutningen af forløbet. Generelt ser det ud til, at ingen af de behandlede konversioner var trivielle for hele klassen. Min analyse af konversionerne fra graf til ligning samt fra ligning til graf tyder på, at en del af de elever, som ikke fik løst opgaverne, faktisk havde den nødvendige viden til rådighed, men den blev ikke mobiliseret fordi dette forudsatte koordination med det numeriske register. Det skal her bemærkes, at det var præcis det samme problem elev U havde i den diagnostiske test (jævnfør afsnit 4.5.1). Konversionerne fra tabel til ligning kræver stort teorikendskab og var ikke så overraskende problematiske for omkring halvdelen af klassen, men den modsatte konversion fra ligning til tabel voldte altså også problemer på grund af problemer med notation og ækvivalens i det symbolske register. Konversionen fra tabel til graf var heller ikke triviel fordi teknikkerne til udvidelse af tabel skulle bruges før grafen kunne tegnes og her var især fejlagtige lineære udvidelser et problem. Konversionen fra graf til tabel blev der ikke direkte stillet opgaver i, men konklusionen er her, at selv om ingen elever havde problemer med at aflæse koordinatsæt (jævnfør den diagnostiske test, afsnit 4.6), så havde mange elever problemer med at udvælge tre passende punkter på grafen til at finde et system med.

6.4 Koordination og monotoniforhold

Tabel	procent score	Type
1.	52	Lin.
2.	56	Eksp.
3.	28	Eksp.
4.	44	Pot.
5.	48	Lin.
6.	20	Pot.

Resultaterne af opgave A4[137] i den afsluttende prøve, hvor tabellerne, graferne og ligningerne fra opgaverne A1-A3 skulle koordineres, kan ses til højre i skemaet, som skal forstås på den måde at 52% af eleverne fandt *både* den rigtige ligning *og* den rigtige graf til tabel nummer 1, og tilsvarende med de andre tabeller. De meget lave scorer i tabel 3. og 6. skyldes at de tilhørende grafer som nævnt lignede hinanden meget. Kun 20% af eleverne svarede rigtigt på alle 6 delspørgsmål i denne opgave. Generelt var der ikke mange, der begrundede deres svar i opgave A4, for eksempel skrev elev T ingen begrundelse i selve opgave A4, men havde til hver af graferne i A2 og hver af ligningerne i A3 udfyldt en tabel og kunne på den måde komme frem til det korrekte resultet i alle seks delspørgsmål af opgave A4. Denne punktvise metode kræver ikke det store overblik, men den giver sikre resultater uafhængigt af elevens resultater i opgaverne A1-A3, da man undervejs ikke skal bruge informationer om typen af sammenhæng eller om monotoni. Det skal her bemærkes, at elev T faktisk ikke havde besvaret alle spørgsmål i opgaverne A1-A3 korrekt. En helt anden metode blev brugt af elev M:

Tabel	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Graf (angiv bogstav)	E	B	D	C	A	F
Ligning (angiv romertal)	III	II	VI	I	V	IV



Elev M besvarede alle opgaverne A1-A4 helt korrekt og viser her at han ved hjælp af information om type og koordination af koefficienter, hældning og additive/multiplikative ændringer løser opgaven korrekt. Jeg vil kalde dette for den globale metode, da man ikke behøver at aflæse koordinatsæt for at bruge metoden.

Det er muligt at et par andre elever end elev M brugte den globale metode i opgave A4, men ingen andre har eksplicit nedskrevet det.

6.4.1 Koordination af graf og ligning (opgave 2, aflevering 16)

I opgave 2, aflevering 16 er der kun en enkelt elev ud af 13 (elev K), der bruger den globale metode korrekt til at koordinere de tre grafer og ligning uden at foretage unødvendige udregninger af koordinatsæt.

Ligning 1 $y = 4 \cdot 2^x$

Skriv svaret og en forklaring her:

GRAF A! Ligning: $y = b \cdot a^x$
Fordi: b = skæring med y-aksen. $b = 4$.
a er større end 1 → Voksende sammenhæng.

6.4.2 Fortolkning af koefficienten b i det numeriske og grafiske register

Udover at analysere elevernes besvarelse af opgaver som direkte handler om koordination af registre, kan man også få et indblik i elevernes brug af koordination ved at undersøge, om eleverne bruger fortolkningen af koefficienter til at vurdere holdbarheden af løsninger.

Elev U, som var den elev fra den nederste tredjedel af klassen, der blev udvalgt under analysen af besvarelser fra den diagnostiske test, bruger i opgaverne B5 og B6 i prøven, at *b* for en eksponentiel sammenhæng er den *y*-koordinat, som hører til *x*-værdien nul. Men i opgaverne B1 og B2, hvor man skal udfylde en tabel henholdsvis tegne en graf ved hjælp af ligningerne $y = 4^x$ og $y = 2 \cdot 3^x$, er hun en af de elever som tror at 4^0 og 3^0 er nul, og grafen i opgave B2 starter derfor i Origo. I samme opgave har eleven korrekt markeret, at *b* har værdien *2*. Elev U ved altså hvordan man finder *b* i tabeller for eksponentielle sammenhænge, men det er en paratviden om *b*, der ikke kan benyttes fleksibelt i andre forbindelser. Med dagligdags sprog ville man sige, at denne elev ikke har overblik, men med mit teoretiske grundlag kan man sige, at hun ikke koordinerer sin viden i de tre registre.

6.4.3 Koordination af graf og tabel

Jeg har ingen data til at understøtte mine påstande, men vil blot nævne at det under gennemgangen af opgave 6 i modul 6 om monotoniforhold var mit indtryk, at hovedparten af klassen havde nemt ved at afgøre om en givet tabel repræsenterede en aftagende eller voksende sammenhæng. Derimod havde næsten alle elever i klassen svært ved at udtale sig kvalitativt om grafen udelukkende ved at se på en tabel. Især var der problemer med at afgøre om grafens hældning voksede eller aftog, når *x*-værdien voksede og med at bruge en udvidelse af tabellen til at fortælle noget om eventuelle skæringspunkter med akserne. Dette bekræfter hvad jeg skrev i afsnit 2.1 nemlig, at der fra et kognitivt synspunkt er stor forskel på at arbejde med skitser, som hører til i et multifunktionelt register og med ”eksakte” grafer, som hører til i et monofunktionelt register.

6.5 Samlet konklusion af data-analysen

Næsten alle eleverne lærte at arbejde med grafer, hvor *x*-aksen var lodret og med ligninger, hvor *x* var isoleret, men kun få elever kunne arbejde fleksibelt med ækvivalens af ligninger (jævnfør afsnit 6.1). Ingen af de behandlede konversioner viste sig at være trivielle for alle eleverne, men elevernes manglende fortrolighed med de enkelte registre var også medvirkende til dette. Jeg vil fremhæve elevernes manglende vilje til at bruge det numeriske register, når der skulle konverteres mellem det grafiske og symbolske register (jævnfør afsnit 6.3.6). I koordinationsopgaverne brugte næsten ingen elever en global tilgang baseret på monotoniforhold, men svarede enten slet ikke eller brugte en punktvis tilgang baseret på aflæsning af koordinatsæt til enkelte punkter (jævnfør afsnit 6.4). Om elevernes tilegnelse af covarians-tilgangen kan jeg konkludere, at samtlige elever i klassen hurtigt forstod at arbejde med additive og multiplikative ændringer i regelmæssige tabeller, men hvis tabellerne var uregelmæssige, hvis der skulle interpoleres eller hvis et "system" skulle aflæses på en graf, så havde en del af eleverne svært ved at følge med. Dette skyldes muligvis, at disse elever identificerede de fire typer af variabelsammenhænge med regelmæssige tabeller (jævnfør afsnit 6.2). Alt i alt betød den valgte covarianstilgang dog, at *ingen* elever stod helt af i den første del af forløbet, hvilket var en stor sejr i denne meget sprogligt orienterede klasse! Til gengæld kunne man på de mange blanke besvarelser i de opgaver i den afsluttende prøve, hvor der indgik ligninger se, at *mange* af eleverne stod af i den sidste del af forløbet (jævnfør afsnit 6.3).

6.6 Elevernes evaluering af forløbet

Da mit design var første del af et to-delt forløb om variabelsammenhænge (sidste halvdel handlede om modellering), valgte jeg at lave en samlet evaluering for de to forløb, men hvor der var specifikke spørgsmål om hver af forløbets dele. Jeg vil her behandle fem af spørgsmålene og elevernes reaktioner (Hele evalueringsskemaet findes i Appendiks 4):

1. *Beskriv med egne ord hvad en variabelsammenhæng er.*
2. *Beskriv hvad der generelt er det sværeste ved at arbejde med tabeller, ligninger og grafer.*
6. *Hvor stort var dit udbytte af undervisningsmaterialet (noterne modul 1-11)?*
7. *Hvordan var opgavernes (opgaverne til modul 1 – 11) sværhedsgrad?*
11. *Beskriv klassens indsats.*

<u>Spørgsmål 1</u>

Motivationen for at stille det første spørgsmål var følgende: Som jeg var inde på i afsnit 3.7 bruger mange elever ikke den formelle definition af en funktion, men bruger i stedet *prototyper*. Ved at få eleverne til med egne ord at beskrive hvad en variabelsammenhæng er, ønskede jeg at få indsigt i hvordan eleverne opfattede variabelsammenhænge – uden at jeg nødvendigvis regnede med at eleverne gav en præcis definition. Lidt over halvdelen af eleverne (9 ud af 16) svarede, at en variabelsammenhæng er en sammenhæng mellem variable (eller tal), her er et par eksempler:

- *Har ik´ helt styr på det. Men det er noget med forskellige sammenhænge mellem variabler!*
- *Hmm, den er svær (sammenhænge mellem variabler)*
- *En specifik sammenhæng mellem et sæt tal. Der findes eksp, log, lin og potens.*
- *En sammenhæng mellem variable. Altså et system, hvor en faktor stiger afhængigt af hinanden.*

De to første eksempler tyder på, at elevernes svar simpelt hen er et ordspil, som ikke bunder i en matematisk definition. Det sidste eksempel er interessant, fordi der nævnes et ”system” og at ”en faktor stiger afhængigt af hinanden.” Vendingerne ”stiger” og ”afhængigt af hinanden” viser at den anvendte covarians-tilgang har sat sine spor hos denne elev, men det er svært at vide, om eleven bruger ordet ”system” som et sæt af additive/multiplikative ændringer, eller om et system bare bruges synomymt med ordet sammenhæng. To andre elever brugte ordet system i den sidstnævnte betydning:

- *En sammenhæng mellem x og y (et system) Ex.* $y = ax + b$
- *Det er en sammenhæng eller et system mellem x og y, der fortæller sammenhængen mellem de 2 i en ligning*

Kun to elever nævnte eksplicit ligningen som det centrale element i en variabelsammenhæng, og fire elever svarede slet ikke. Hvad kan man konkludere? Da jeg ikke spurgte efter en definition, men bare en beskrivelse med egne ord, kan jeg ikke med sikkerhed konkludere, at kun 2 af de 16 elever var i stand til at definere en variabelsammenhæng som en ligning på samme måde som jeg selv gjorde i starten af forløbet. Men usikkerheden hos eleverne og tendensen til at svare ved hjælp af et ordspil eller eksempler giver et indtryk af, at mange af eleverne bare bruger ordet ”variabelsammenhæng” som en overskrift for det forløb, vi var igennem, og ikke som et matematisk begreb, der kan defineres.

<u>Spørgsmål 2 (det sværeste ved forløbet?)</u>

11 elever ud af 16 nævnte ligninger som det sværeste ved forløbet, heraf nævnte tre elever specifikt at det sværeste var at finde en ligning til en graf. To elever nævnte logaritmer som det sværeste ved forløbet.

Spørgsmål 6 (noterne)

13 ud af 16 elever udtrykte sig positivt heraf flere endda meget positiv om noterne til modul 1 til 11, her er et par eksempler:

- *Jeg synes noterne var en stor hjælp. Nogle gange skulle man lige læse dem igennem et par gange. Men alt i alt var det rigtig god supplement til undervisningen.*
- *Rigtig godt, man får et godt overblik*
- *Det var rart med noterne. Men vi ville nok få mere ud af det, hvis vi selv lavede de noter.*

Den sidste kommentar bekræfter hvad jeg selv observerede i timerne nemlig, at flere elever undlod at lave egne notater, fordi de fik udleveret et komplet sæt noter til hvert modul. Dette kan være en ulempe ved den valgte fremgangsmåde med udlevering af noter til hvert modul, men en anden elev beskriver her en fordel:

- *Har super mange noter! Og der er orden i dem fordi vi fik i de der ark i noter osv.*

De udleverede noter gav altså eleverne mulighed for at få en god struktur i deres egne notater.

Spørgsmål 7 (opgaverne)

7 ud af 16 elever beskriver sværhedsgraden som varierende eller meget varierende, men kun to elever syntes at opgaverne var for nemme og kun to elever syntes at opgaverne var for svære. Der var en tendens til at fremhæve den stigende sværhedsgrad:

- *Måske lidt for krævende til sidst*
- *Passende. Startede nemt, blev gradvist sværere*
- *Det var ret nemt i starten og så blev det lidt udfordrene til sidst*

Spørgsmål 11 (Klassens indsats)

Grunden til at jeg tager klassens indsats op er, at elevernes resultater i prøverne i høj grad afhænger af hvordan arbejdsmiljøet har været i klassen. 9 ud af 16 elever beskrev klassens indsats som dårlig eller utilstrækkelig og resten beskrev indsatsen som okay eller at det var individuelt hvor meget man fik ud af det. Ingen skrev at klassen havde klaret det godt.

6.7 Konklusion om forløbets sværhedsgrad og nogle forbedringsforslag

Det fremgik af elevernes besvarelser af den afsluttende prøve og af evalueringsskemaerne, at mange af eleverne i klassen stødte på store problemer i den sidste del af forløbet, hvor der indgik ligninger, men at sværhedsgraden indtil da var passende. Omkring en håndfuld af eleverne havde endda en form for ”lignings-blokering,” som kunne aflæses i form af en masse blanke besvarelser til opgaverne om lignnger. Det er ikke sikkert, at man på den tid der var til rådighed ville være i stand til at mindske problemet med ligninger, men her er tre forbedringsforslag til en hypotetisk gentagelse af forløbet med den samme forsøgsklasse.

1. Brug mere tid på generelle egenskaber ved det symbolske register før forløbets start.
2. Brug mere tid på den sidste del af forløbet.
3. Skær nogle af sætningerne om konversion fra tabel til ligning væk.

Det første forslag hænger sammen med, at det ene modul, der blev brugt på symmetri og ækvivalens, ikke gav udslag i høje succesrater til testen og prøven i disse opgavetyper. Men da nogle af elevernes problemer i det symbolske register stikker meget dybt - for eksempel tyder mine resultater på, at flere elever ikke opfatter lighedstegnet som et ækvivalenssymbol - er det ikke sikkert, at man reelt ville kunne spore en forbedring efter få moduler. Måske burde man i virkeligheden starte med at bruge meget længere tid på de enkelte registre end jeg gjorde? Eller vil det bare føre til kedsomhed hos de elever, som ikke har problemer med de matematiske forudsætninger?

Problemet med det andet forslag er, at fordelene ved en covarians-tilgang med udgangspunkt i det numeriske register forsvinder, hvis man alligevel bruger størstedelen af tiden på ligninger. Derfor er det tredje forslag efter min mening bedre end det andet forslag. De sætninger, hvor to punkter er givet og man finder ligningen for en givet type af sammenhæng, kunne man eventuelt fjerne, da man i opgaveløsningen altid kan nøjes med at bruge de sætninger, hvor et punkt og et system giver ligningen. Desuden kan ligningen for en logaritmisk sammenhæng nedtones. Dog vil jeg understrege, at jeg ikke fortryder, at jeg medtog disse sætninger, idet lidt under en tredjedel af forsøgsklassen som nævnt havde et meget højere abstraktionsniveau end de andre elever, og havde brug for udfordringer. Måske burde man have gjort det klart for eleverne, at visse af sætningerne og beviserne var valgfrie?

6.8 Reproducérbarhed af forløbet

Jeg har i dette speciale lavet et design, der var henvendt til en klasse, der havde matematik på C-niveau, hvor de fleste elever ikke havde ambitioner indenfor matematik og hvor mange af eleverne havde huller i deres grundlæggende matematiske forudsætninger fra folkeskolen. Derfor ville den første del af forløbet sandsynligvis give for få udfordringer, hvis man valgte at prøve det af på en meget naturvidenskabeligt orienteret klasse: Den diagnostiske test og opgaverne om symmetri ville sikkert være en trivialitet og mange af de indledende opgaver, hvor for eksempel tabeller på simpel vis skulle udvides, ville sikkert kede eleverne. Dermed mener jeg ikke nødvendigvis, at den valgte covariation-tilgang er uegnet til en naturvidenskabeligt orienteret klasse. Hvis man lægger vægten over på den sidste del af mit design og går mere i dybden med monotoniforhold, omvendte sammenhænge, logaritmer samt bevisførelse, og desuden går mere i dybden med interpolation, er der efter min mening rigeligt med matematik at tage fat på. En af de ting, som jeg har lært af at dette speciale er, at selv matematik, som man i lang tid har opfattet som ”børnelærdom,” kan indeholde et hav af facetter og en matematisk dybde, hvis man bruger tid på at gå i dybden med det.

Konklusionen er, at forløbet ikke kan genanvendes i sin nuværende form til alle 1.G-klasser, men at man med få eller ingen ændringer kan genanvende forløbet til en typisk C-niveau klasse, som har lave ambitioner og hullede forudsætninger, mens man ved at lægge vægten på den sidste del af forløbet kan genanvende hovedparten af forløbet til mere ambitiøse 1.G - klasser.

Efter min opfattelse viste afprøvningen af designet, at det fra et matematisk synspunkt kan lade sig gøre at definere lineære, eksponentielle, logaritmiske og potens-sammenhænge ved hjælp additive og multiplikative ændringer i tabeller, derefter at behandle grafer og til sidst ligninger, sådan at man samlet set får et afrundet og indholdsrigt forløb. Med dette matematiske fundament som springbræt ville det være interessant at gå videre med at tilføje modelleringsdimensionen til forløbet på et tidligt tidspunkt, sådan at den komparative dimension af ændringsbegrebet belyses. Opgaven om Doctordriver i den første aflevering tydede på, at det er muligt at lave meningsfyldte modelleringsopgaver uden at inddrage det symbolske register, og idéen med at lade IT-hjælpemidler styrke den komparative dimension af ændringsbegrebet virker tiltalende.

6.9 Konklusion

I dette speciale har jeg designet et undervisningsforløb om variabelsammenhænge i gymnasiets matematikundervisning på C-niveau. I Kapitel 2 beskrev jeg Duvals teori om semiotiske repræsentationer, som kort sagt handler om de forskellige systemer af tegn i matematikken og deres betydning for elevernes opfattelse af matematikken. Jeg pointerede, at jeg ikke ville bruge Duvals teori til design af de enkelte timer i undervisningsforløbet, men snarere til at give en overordnet struktur af designet. I *a priori analysen* i kapitel 3 behandlede jeg mulighederne og begrænsningerne ved tabeller, grafer og ligninger for funktioner, elevernes typiske misforståelser af funktionsbegrebet og skelnede mellem to måder at gribe funktionsbegrebet an på i undervisningen: En strukturel korrespondance-tilgang eller vækstbaseret covarians-tilgang. Da de karakteristiske vækstegenskaber for lineære, eksponentielle og potens-sammenhænge fremhæves i en covarians-tilgang baseret på additive og multiplikative ændringer af variable, og da dette ville give mulighed for at tage fokus væk fra det problematiske symbolske register, valgte jeg at basere undervisningsforløbet på en covarians-tilgang. Jeg lavede i kapitel 4 en diagnostisk test, som skulle undersøge elevernes forudsætninger med at arbejde med tabeller, grafer og ligninger, og som gav mig idéer, som blev brugt til at designe selve opgaverne og undervisningsmaterialet i kapitel 5. Den grundlæggende idé i designet var at definere lineære, eksponentielle, logaritmiske og potens-sammenhænge ved hjælp af gentagne additive og multiplikative ændringer af *x* og *y* i tabeller. Grafer blev inddraget på et tidligt stadie, men behandlingen af ligninger blev udskudt. Ved på denne måde at forfremme tabeller til dynamiske repræsentationer, kan hovedparten af pensum om variabelsammenhænge inklusiv monotoniforhold og fordoblingstid behandles på stringent vis uden brug af ligninger. Min *a posteriori analyse* i kapitel 6 viste, at identifikationen af typer af variabelsammenhænge med bestemte regelmæssige tabeller ikke var uproblematisk og at en del elever havde problemer med selv simple konversioner, men at covarians-tilgangen trods alt gav alle elever i klassen en chance for at følge med i undervisningen. Fra et matematisk synspunkt fungerede forløbet tilfredsstillende, og det kan med mindre justeringer sagtens bruges igen – selv til mere ambitiøse og matematisk orienterede gymnasieklasser end den anvendte forsøgsklasse.

7 Litteraturliste

1. Bekendtgørelsen om uddannelse til studentereksamen (2004). BEK nr 1348 af 15/12/2004, Bilag 36 (Matematik C). 2004.

2. Carstensen, J., Frandsen, J. (1997): Mat 1. 1. udgave, 2. oplag. ISBN 87 7783 879 3. Viborg 1997.

3. Clausen, F., Schomacker, G., Tolnø, J. (2005): Gyldendals Gymnasiematematik Grundbog C. 1. udgave, 1. oplag, ISBN 87-02-04071-9 Gyldendalske boghandel, København 2005.

4. Confrey, J., Smith, E. (1994): Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. Educational Studies in Mathematics **26**: 135-164, 1994.

5. Duval, R. (2002a): The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education. An International Journal (2002) v. 1(2) p. 1-16. 2002.

6. Duval, R.(2002b): Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. Representations and mathematics visualization. Editor(s): Hitt, Fernando Centro de Investigacion y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), Mexico (Mexico). Dept. de Matematica Educativa Mexico: Cinvestav-IPN. 2002. p. 311-335 of 391 p. ISBN: 968-5226-10-5

7. Duval, R. (2006): A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning af mathematics. Educational Studies in Mathematics (2006) **61**: 103–131. Springer 2006.

8. Ebbesen, G. (2006): Matematik C til grundforløbet. 2. Udgave, Virum Gymnasium 2006.

9. Hitt, F. (2002): Construction of Mathematical Concepts and Cognitive Frames. Representations and mathematics visualization. Editor(s): Hitt, Fernando Centro de Investigacion y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), Mexico (Mexico). Dept. de Matematica Educativa Mexico: Cinvestav-IPN. 2002. p.271-292 of 391 p. ISBN: 968-5226-10-5

10. Hoffmann, M. (2006): What is a semiotic perspective, and what could it be? Some comments en the contributions to this special issue. Educational Studies in Mathematics (2006) **61**: 279–291

11. Janvier, C. (1998): The Notion of Chronicle as an Epistemological Obstacle to the Concept of Function. Journal of Mathematical Behavior, 1"7 (1), 79-103 ISSN 0364-0213. Ablex Publishing Corp. 1998.

12. Jensen, S., Touborg, J. (1998): Vejledende eksempler på eksamensopgaver i matematik GYMNASIET. Matematisk linje 2-årigt B-niveau, Sproglig linje højt niveau. ISBN 87-89229-87-8 Matematiklærerforeningen 1998.

13. Kieran, C. (1981): Concepts associated with the equality symbol. Educational Studies in Mathematics **12**(3), 317-326. 1981.

14. Kleiner, I. (1989): Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. The College Mathematics Journal, September 1989, Volume 20, Number 4, pp. 282–300.

15. MacGregor, M., Stacey, K. (1997): Students´ understanding of algebraic notaion: 11-15. Educational Studies in Mathematics **33**: 1–19, 1997.

16. Mevarech, Z., Kramarsky, B. (1997): From verbal descriptions to graphic representations: Stability and change in students´ alternative conceptions. Educational Studies in Mathematics **32**: 229–263, 1997.

17. O´Connor, J., Robertson, E. (2005): The Function Concept. Fra Mactutor: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Functions.html

18. Pedersen, T. (2005): Vækst. Matematiklærerforeningen 2005. ISBN 87-90996-15-1.

19. Ponte, J. (1992): The History of the Concept of Function and Some Educational Implications. TME Volume 3 Number 2 .The Mathematics 1992

20. Scwarz, B., Dreyfus, T. (1995): New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. Educational Studies in Mathematics **29**: 259-291, 1995.

21. Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics **22**:1-36, 1991.

22. Slavit, D. (1997): An alternative route to the reification af the function. Educational Studies in Mathematics **33**: 259–281, 1997.

23. Tall, D., Bakar, M. (1992): Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. Int. J. Math Ed Sci & Techn., **23** 1, 39– 50. 1992.

24. Tall, D., Gray, E., Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., Yusof, Y. (2001): Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 1, 81–104.

25. Thompson, P. (1994): Students, functions, and the undergraduate curriculum. E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education I, Providence, R.I., American Mathematical Society, and Washington, D.C., Mathematical Association of America. 1994

26. Derudover har jeg i forløbet anvendt netsiden: http://www.doctordriver.dk/05ddnew/play/brems/brems.html

8 Oversigt over Appendiks og Bilag

8.1 Oversigt over Appendiks

Appendiks har sin egen indholdsfortegnelse, her vises hovedpunkterne:

1. Den diagnostiske test
2. Opgaver
3. Undervisningsmateriale
4. Evalueringsskema
5. Oversigt over bilag
6. Den afsluttende prøve

8.2 Oversigt over Bilag

Bilagene består først og fremmest af scanninger af elevernes besvarelser til nogle af opgaverne. Bilagets nummer angiver sammen med en elevs bogstav en konkret besvarelse. For eksempel angiver Bilag 2.A elev A´s besvarelse af opgaverne i bilag 2.

- Bilag 1: Udvalgte elevbesvarelser til opgaverne i modul 1
- Bilag 2: Samtlige elevbesvarelser til den første aflevering
- Bilag 3: Samtlige elevbesvarelser til den anden aflevering
- Bilag 4: Samtlige elevbesvarelser til test modul 4
- Bilag 5: Samtlige elevbesvarelser til den afsluttende prøve
- Bilag 6: Regneark med besvarelser af den diagnostiske test
- Bilag 7: Regneark med optælling for test modul 4
- Bilag 8: Regneark med optælling for den første aflevering
- Bilag 9: Regneark med optælling for den anden aflevering
- Bilag 10: Regneark med optælling for den afsluttende prøve